

7. FOLGE. 1959. BAND 4. HEFT 6-8

THE UNIVERSITY  
OF MICHIGAN  
DEC 15 1959  
PHYSICS  
LIBRARY

# ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren  
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,  
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien,  
M. Planck, E. Grüneisen, F. Möglich

Der ganzen Reihe 459. Band

Kuratorium:

W. GENTNER, W. GERLACH, F. HUND, B. KOCKEL,  
M. v. LAUE, W. MEISSNER, W. PAUL, R. W. POHL,  
R. ROMPE, R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN  
Heidelberg

G. RICHTER  
Berlin



JOHANN AMBROSIIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionschluß am 13. Oktober 1959

## Inhalt

K. Westpfahl, Freiburg i. Br.: Zur Theorie einer Klasse von Beugungsproblemen mittels singularer Integralgleichungen. I. Teil A. „Klassische“ Beugungsprobleme. Mit 12 Abbildungen .....	283
H. Rabenhorst und J. Raab, Berlin-Adlershof: Dielektrische Eigenschaften von Halbleitern. Mit 7 Abbildungen .....	352
W. Steubing und F. Lebowsky, Hamburg: Die Heliumlinien unter dem Einfluß senkrecht gekreuzter elektrischer und magnetischer Felder. Mit 4 Abbildungen .....	360
H. Rother, Berlin: Theorie der Diffusionswellen. I. (Laufende Schichten in Niederdruckentladungen.) Mit 10 Abbildungen .....	373
W. Bertoldi und Chr. Kleint, Leipzig: Äußere Feldemission von ZnS-Einkristallen. Mit 5 Abbildungen .....	388
F. Rößler, St. Louis: Die Verteilungstemperatur von Rußflammen. Mit 9 Abbildungen .....	396
Register für die Bände 3 und 4 .....	423

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Einsendung der Manuskripte erbeten an:

Prof. Dr. H. Kopfermann, Heidelberg, Albert-Ueberle-Straße 7,

Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band DM 34.— zuzüglich Postgebühren (U. S. \$ 8.57 einschließlich Porto).

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

# ANNALEN DER PHYSIK

7. FOLGE \* BAND 4, HEFT 6-8 \* 1959

## *Zur Theorie einer Klasse von Beugungsproblemen mittels singulärer Integralgleichungen. I*

Teil A. „Klassische“ Beugungsprobleme

Von Konradin Westpfahl

Mit 12 Abbildungen

### Inhaltsübersicht

Für eine Klasse zweidimensionaler Beugungsprobleme (Halbebene, Spalt, Gitter usw.) wird die Randwertaufgabe auf singuläre Integralgleichungen vom Cauchyschen Typ zurückgeführt (Randbedingung  $v = 0$  auf dem Schirm). Die Anzahl der Gleichungen stimmt mit der Anzahl der Kanten des Schirms überein. Für das Einkantenproblem läßt sich die Integralgleichung mittels der funktionentheoretischen Methode von Muskhelishvili geschlossen auflösen (die Methode enthält das Wiener-Hopf-Verfahren als Spezialfall). Das Zweikantenproblem wird asymptotisch (für einen gegenüber der Wellenlänge großen Kantenabstand) gelöst und numerisch mit der Reihenentwicklung nach Mathieuschen Funktionen verglichen.

Die mathematischen Methoden zur Behandlung „technischer“ Beugungsprobleme (offene und geschlitzte Wellenleiter) werden bereitgestellt. Eine Zusammenstellung der mathematischen Ergebnisse findet sich im Anhang.

### Einleitung

Seit Poincaré (1892) darauf hingewiesen hat, daß Beugungsprobleme als reguläre Randwertprobleme der Wellengleichung<sup>1)</sup> aufzufassen sind, gibt es eine Anzahl „strenger Lösungen“ spezieller Beugungsprobleme. Die dabei bisher zur Anwendung gelangten Methoden sind folgende:

a) Die Separationsmethode. Sie führt zum Ziel, falls die Oberfläche des beugenden Objekts vollständig von einer Koordinatenfläche gebildet wird, die zu einem (krummlinigen) Koordinatensystem gehört, in dem sich die Wellengleichung separieren läßt (allgemeinster Fall: „Ellipsoid“; wichtige Spezialfälle: Kreisscheibe, Kreisblende, Halbebene, Streifen, Spalt). Die Methode führt auf Reihenentwicklungen nach speziellen höheren transzendenten Funktionen.

<sup>1)</sup> Wir beschränken uns hier auf skalare Wellenfelder. Für vektorielle (elektromagnetische) Felder gilt das Folgende *cum grano salis*. Neben einer (homogenen) Randbedingung ist noch eine Feldsingularität und eine Ausstrahlungsbedingung vorzuschreiben. Bei den historisch wie praktisch besonders wichtigen (unendlich dünnen) „Schirmen“ („Antennen“) ferner noch eine Kantenbedingung.

b) Sommerfelds Methode der verzweigten Lösungen (1896). Diese ist im Prinzip bei beliebig berandeten Schirmen durchführbar. Praktisch gelingt die Konstruktion der verzweigten Lösung (nach einem heuristischen Verfahren) jedoch nur für eine gerade beugende Kante (d. h. auf einer Riemannschen Fläche mit einem Verzweigungspunkt). Damit läßt sich ein Keil mit beliebigem Kantenwinkel behandeln (Spezialfall: Halbebene). Das Ergebnis erscheint als komplexes Integral.

c) Das Wiener-Hopf-Verfahren. Es ist für Schirme anwendbar, die von Teilen (beliebig vieler) Zylinderflächen gebildet werden, die zu parallelen Koordinatenflächen eines Koordinatensystems gehören, in dem sich die Wellengleichung separieren läßt (Zylinder zweiter Ordnung). Die Kanten der Schirme müssen dabei sämtlich in einer Ebene liegen, die von den Erzeugenden der Zylinder senkrecht durchstoßen wird<sup>2</sup>). Wir wollen hier von „Einkantenproblemen“ sprechen<sup>3</sup>) (typische Fälle: Halbebene, offener Plattenwellenleiter, offener Kreisrohrwellenleiter). Die Methode führt auf „geschlossene“ Ausdrücke (komplexe Integrale). Für die Halbebene liefert sie einen systematischen Zugang zu Sommerfelds Methode. Das Verfahren führt über Fredholmsche oder duale Integralgleichungen zur Anwendung funktionentheoretischer Methoden („Faktorisierung“, analytische Fortsetzung, Liouvillescher Satz<sup>4</sup>).

Die vorliegende (und eine in Aussicht genommene) Arbeit beschäftigt sich mit :

d) der Methode der singulären Integralgleichungen (vom Cauchyschen Typ). Auf diese lassen sich neben den Einkantenproblemen auch „Zweikantenprobleme“ zurückführen. Diese liegen vor, falls die unter c) genannten (beliebig vielen) Zylinderstücke Kanten besitzen, die in zwei parallelen Ebenen liegen, die von den Erzeugenden der Zylinder senkrecht durchstoßen werden. (Typische Fälle: Streifen, Spalt, Plattenwellenleiter endlicher Länge, geschlitzter Plattenwellenleiter, Kreisrohr endlicher Länge, senkrecht zu den Erzeugenden geschlitztes Kreisrohr.)

Entsprechend lassen sich auch „Vielkantenprobleme“ auf Systeme singulärer Integralgleichungen vom Cauchyschen Typ zurückführen (die Anzahl der Gleichungen stimmt dabei mit der Anzahl der Kantenebenen überein; typische Fälle: Gitter, Vielschlitzantennen). Der Vorteil der Zurückführung der Randwertaufgabe auf singuläre Integralgleichungen des genannten Typs liegt darin, daß über diese Gleichungen bereits umfassende mathematische Untersuchungen vorliegen (s. die in § 2 zitierte Literatur). Die dabei im Vordergrund stehende Methode der Cauchyschen Integrale umfaßt die funktionentheoretischen Schritte des Wiener-Hopf-Verfahrens. In der Tat bedeutet die „Faktorisierung“ nichts anderes als die Lösung eines speziellen homogenen „Hilbert-Problems“ der Funktionentheorie (nämlich eines solchen, für das die Unstetigkeitslinie der stückweise holomorphen Funktion die reelle Achse ist). Mit Hilfe Cauchyscher Integrale läßt sich aber das

<sup>2</sup>) Vgl. dazu S. N. Karp, New York, Research Rep. EM-25 (1950).

<sup>3</sup>) Maßgebend für die Bezeichnung Ein- bzw. Mehrkantenproblem ist nicht die Zahl der Kanten, sondern die Zahl der (parallelen) Ebenen (senkrecht zu den Schirmen), in denen die Kanten liegen („Kantenebenen“).

<sup>4</sup>) Der Weg läßt sich übrigens noch beträchtlich abkürzen; vgl. D. S. Jones, Quart. J. Math. Oxford (2) **3**, 189 (1952).

inhomogene Hilbert-Problem (für eine beliebige offene oder geschlossene Unstetigkeitslinie) in voller Allgemeinheit lösen.

Eine Grenze ist dem Verfahren dadurch gezogen, daß sich Systeme von singulären Integralgleichungen (bzw. von Hilbert-Problemen) bisher nicht in derselben Allgemeinheit lösen lassen wie eine einzige (bzw. ein einziges). Daher ist man bei Mehrkantenproblemen bisher noch auf Approximationen angewiesen. In der vorliegenden Arbeit behandeln wir jeweils den einfachsten Fall, in dem die Schirme parallele Streifen ein und derselben Ebene sind („klassische“ Beugungsprobleme, § 1). Die mathematischen Methoden werden jedoch sogleich für die allgemeineren Fälle dargestellt (§ 2), auf die in der in Aussicht genommenen Arbeit eingegangen werden soll. § 3 bringt für den Spalt eine Durchführung der Methode bis zu numerischen Ergebnissen.

### § 1. Zur Darstellung von Beugungsfeldern

Wir betrachten die Beugung eines skalaren stationären Wellenfeldes  $v$  an einem (unendlich dünnen) ebenen Schirm, der von parallelen Geraden begrenzt sei (Halbebene, Spalt, Gitter usw.). Die Ebene des Schirmes sei die  $xy$ -Ebene, die Schirmränder seien parallel zur  $y$ -Achse. Aus dem Halbraum  $z < 0$  falle eine ebene Welle  $v_0$  ein, deren Ausbreitungsrichtung senkrecht zu den Schirmkanten sei (s. Abb. 1):

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= e^{i k (x \cos \theta_0 + z \sin \theta_0)} \\ &= e^{i k (x \alpha_0 + z \sqrt{1 - \alpha_0^2})} = e^{i k r \cos (\theta - \theta_0)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$(\alpha_0 = \cos \theta_0).$

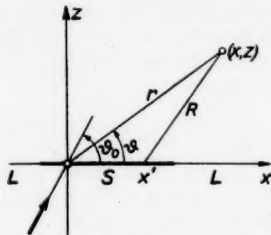


Abb. 1. Zur Theorie der Beugung an ebenen streifenförmigen Schirmen

Die Spur des Schirmes auf der  $x$ -Achse bezeichnen wir mit  $S$ ; die übrigen Teile dieser Achse mit  $L$  (Abb. 1). Auf dem Schirm soll das Wellenfeld die Randbedingung  $v = 0$  erfüllen<sup>5)</sup>. Es handelt sich dann um die Lösung des folgenden zweidimensionalen Randwertproblems

$$(\Delta + k^2) v(x, z) = 0 \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$v(x, \pm 0) = 0, \quad x \in S. \quad (3)$$

Ferner muß  $v$  der Ausstrahlungs- und Kantenbedingung genügen, um die Lösung  $v$  eindeutig festzulegen<sup>6)</sup>. Die Zeitabhängigkeit wollen wir in der Form  $e^{-i\omega t}$  voraussetzen; die Kreisfrequenz hängt dann mit der in (1) und (2) auftretenden Wellenzahl  $k$  durch die Beziehung  $\omega = c k$  ( $c$  Phasengeschwin-

<sup>5)</sup> Auf die Randbedingung  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$  läßt sich alles Folgende ohne Schwierigkeit übertragen.

<sup>6)</sup> Siehe z. B. A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. IV Optik. Wiesbaden 1950. S. 255ff.

digkeit) zusammen. In physikalischer Hinsicht kann  $v$  als elektrische Feldstärke eines parallel zu den Kanten des „ideal leitenden“ Schirmes  $S$  polarisierten elektromagnetischen Feldes interpretiert werden bzw. als Geschwindigkeitspotential einer am „schallweichen“ Schirm  $S$  gebeugten Schallwelle kleiner Amplitude.

1. Felddarstellung mit Hilfe des Flächenstromes. Wendet man den Greenschen Satz auf  $v$  und die „Greensche Funktion des freien Raumes“  $H_0^1(kR)$  (Hankel-Funktion erster Art,  $R = \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}$ ) an, so ergibt sich mit (2) und (3) sowie der Ausstrahlungsbedingung<sup>7)</sup>

$$v(x, z) = v_0(x, z) + \frac{1}{2i} \int_S \varphi(x') H_0^1(kR) dx' \quad (4)$$

mit

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + z^2} \quad (5)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} [v_z(x, +0) - v_z(x, -0)], \quad x \in S. \quad (6)$$

$\varphi(x)$  ist also der Sprung des Normalgradienten des Feldes beim Hindurchtreten durch den Schirm, der elektromagnetisch als Flächenstromdichte zu interpretieren ist. Für diese Größe erhält man zufolge der Randbedingung (3) eine Integralgleichung vom allgemeinen „Faltungstypus“ (bezüglich des Intervalls  $S$ )

$$\int_S \varphi(x') H_0^1(k|x-x'|) dx' = -2i e^{ik\alpha_0 x}, \quad x \in S. \quad (7)$$

In der Darstellung (4) bis (7) wird der Beugungseffekt durch Sekundärwellen (Zylinderwellen) beschrieben, die vom Schirm ausstrahlen, auf dem der Strom  $\varphi(x)$  fließt.

2. Felddarstellung mit Hilfe der Fernfeldamplitude. Wir wollen nun eine Zerlegung nach ebenen Wellen vornehmen. Hierzu brauchen wir nur die Fourier-Darstellung der Hankel-Funktion

$$H_0^1(kR) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik[\alpha(x-x') + \sqrt{1-\alpha^2}|z|]} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (8)$$

in (4) einzusetzen. Von der Wurzel  $\sqrt{1-\alpha^2}$  ist hier und im folgenden derjenige Zweig zu wählen, der für  $|\alpha| < 1$  positiv ist; ferner ist den Verzweigungspunkten  $\pm 1$  in der unteren bzw. oberen komplexen  $\alpha$ -Halbebene auszuweichen. Die Verzweigungsschnitte sollen also in die obere bzw. untere Halbebene verlegt werden (Abb. 2)<sup>8)</sup>. Es ergibt sich

$$v(x, z) = e^{ik(\alpha_0 x + \sqrt{1-\alpha_0^2}z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha) e^{ik(\alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}|z|)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad (9)$$

<sup>7)</sup> Man vgl. zur Greenschen Methode B. B. Baker and E. T. Copson, The Mathematical Theory of Huygens' Principle. 2. Aufl. Oxford 1950. S. 155–165.

<sup>8)</sup> Durch die Substitution  $k\alpha \rightarrow \alpha$  geht die Wurzel in die Form  $\sqrt{k^2 - \alpha^2}$  über. Nimmt man  $k$  komplex mit positivem Imaginärteil (den man am Schluß der Rechnung  $\rightarrow 0$  gehen läßt), so ist also  $\sqrt{k + \alpha}$  in der oberen  $\alpha$ -Halbebene,  $\sqrt{k - \alpha}$  in der unteren holomorph, was für das Folgende bequem ist. Man erreicht aber dasselbe für  $\sqrt{1 + \alpha}$  und  $\sqrt{1 - \alpha}$ , wenn man die Verzweigungspunkte  $\mp 1$ , wie oben angedeutet, mit zur unteren bzw. oberen Halbebene rechnet.

falls wir die Integrationsreihenfolge vertauschen und die Fourier-Transformierte des Flächenstromes

$$\varphi(\alpha) = \int_S \varphi(x) e^{-i k \alpha x} dx \quad (10)$$

einführen. Aus (2) bzw. (7) einerseits sowie aus (10) andererseits folgen für  $\varphi(\alpha)$  die simultan zu erfüllenden „dualen“<sup>9)</sup> Integralgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{i k \alpha x} d\alpha &= -e^{i k \alpha_0 x}, & x \in S \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha) e^{i k \alpha x} d\alpha &= 0, & x \in L. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die erste Gl. (11) sorgt also dafür, daß die Felddarstellung (9) die Randbedingung auf dem Schirm erfüllt; die zweite hingegen dafür, daß  $\partial v / \partial z$  in der Öffnung stetig ist<sup>10)</sup>.

Die physikalische Bedeutung der Größe  $\bar{\varphi}(\alpha)$  ergibt sich leicht, wenn man in der Darstellung (9) zu Polarkoordinaten (Abb. 1)

$$x = r \cos \vartheta, \quad z = r \sin \vartheta$$

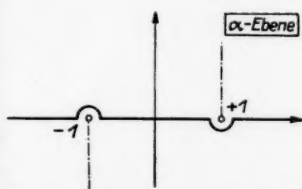


Abb. 2. Integrationsweg für Gl. (8) in der  $\alpha$ -Ebene

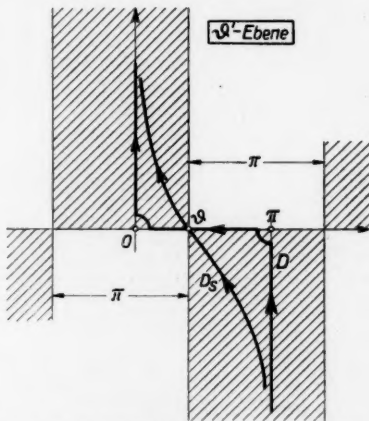


Abb. 3. Integrationsweg für Gl. (12) in der  $\theta'$ -Ebene

übergeht und eine neue Integrationsvariable gemäß  $\alpha = \cos \vartheta'$  einführt

$$v(r, \vartheta) = e^{i k r \cos(\vartheta - \vartheta_0)} - \frac{1}{2\pi i} \int_D \bar{\varphi}(\cos \vartheta') e^{i k r \cos(\vartheta' \mp \vartheta)} d\vartheta', \quad \vartheta \geq \pi. \quad (12)$$

(Der Integrationsweg  $D$  in der komplexen  $\vartheta'$ -Ebene geht dabei gemäß  $\alpha = \cos \vartheta'$  aus der reellen Achse der  $\alpha$ -Ebene hervor, s. Abb. 3.) Wertet man näm-

<sup>9)</sup> Vgl. E. C. Titchmarsh, *Theory of Fourier-Integrals*. Oxford 1937. S. 334–339. — C. J. Tranter, *Integral Transforms in Mathematical Physics*. 2. Aufl. London, New York 1956. Kap. 8.

<sup>10)</sup> Man vgl. zur Fourier-Methode P. C. Clemmow, *Proc. Roy. Soc. London (A)* 205, 286 (1951). H. Hönl, *Z. Physik*, 131, 290 (1952). — Für elektromagnetische Felder K. Westpfahl, *Z. Physik* 141, 354 (1955).

lich (12) für das Fernfeld ( $r \rightarrow \infty$ ) mit Hilfe der Sattelpunktmethode aus, so ergibt sich

$$v(r, \vartheta) \rightarrow v_0 + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \bar{\varphi}(\cos \vartheta), \quad \vartheta < \pi. \quad (13)$$

$\bar{\varphi}(\cos \vartheta)$  ist also nichts anderes als die Winkelabhängigkeit des Fernfeldes (Fraunhofersches Beugungsfeld). Beim Übergang von (12) zu (13) muß allerdings vorausgesetzt werden, daß bei der Verlegung des Weges  $D$  in die Fallinie  $D_s$  durch den Sattelpunkt  $\vartheta' = \vartheta$  kein Pol von  $\varphi$  eingefangen wird. Die Beiträge solcher Pole liefern zusammen mit  $v_0$  die geometrisch-optischen Verhältnisse (vgl. die Ausführungen beim Spalt weiter unten).

3. Umformung der Integralgleichungen. Wir wollen die Integralgleichungen (7) bzw. (11) noch in eine andere Gestalt bringen. Zu diesem Zweck führen wir zunächst die „Sieboperatoren“

$$\Theta_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \in L \end{cases} \quad (14)$$

und

$$\Theta_L(x) = 1 - \Theta_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in S \\ 1, & x \in L \end{cases} \quad (15)$$

ein. Multiplizieren wir nun (7) mit  $\Theta_S$  und ergänzen wir die Stromdichte  $\varphi(x)$ , die zunächst nur auf dem Schirm  $S$  definiert ist, durch  $\varphi(x) = 0$  für  $x \in L$ , so folgt

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x') \Theta_S(x) H_0^{(1)}(k|x-x'|) dx' &= 2i \Theta_S(x) e^{ik\alpha_0 x} \\ \Theta_L(x) \varphi(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Gl. (16) gilt jetzt im Gegensatz zu Gl. (7) auf der ganzen  $x$ -Achse. Ein entsprechendes Gleichungssystem erhalten wir für  $\bar{\varphi}(x)$ , wenn wir die erste Gl. (11) mit  $\Theta_S$ , die zweite mit  $\Theta_L$  multiplizieren.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \Theta_S(x) e^{ik\alpha x} d\alpha &= -\Theta_S(x) e^{ik\alpha_0 x} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha) \Theta_L(x) e^{ik\alpha x} d\alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Auch diese Gleichungen gelten jetzt für alle  $x$ . Das Integral in (16) ist vom speziellen Faltungstypus im Sinne der Fourier-Transformation. Es liegt daher nahe, (16) einer Fourier-Transformation zu unterwerfen. Nach bekannten Regeln (Faltungssatz) ergibt sich dann bei Beachtung von (8)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} \bar{\Theta}_S(\alpha - \alpha') d\alpha' &= -\bar{\Theta}_S(\alpha - \alpha_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \bar{\Theta}_L(\alpha - \alpha') d\alpha' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)^{11)}$$

<sup>11)</sup> Die erste Integralgleichung (18) geht mit der Substitution

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \hat{\varphi}(\alpha) - 2\pi i \sqrt{1-\alpha^2} \delta(\alpha - \alpha_0)$$

in die „Integralgleichung der optischen Abbildung“ über; vgl. L. Mandelstam, Festschrift H. Weber. Leipzig-Berlin 1912. S. 228–241. — W. Schmeidler, Integralgleichungen. Leipzig 1955. S. 383. Wir werden an Beispielen zeigen, daß beide Gln. (18) zusammen  $\bar{\varphi}(\alpha)$  eindeutig bestimmen.

dabei bedeutet der Querstrich wie bisher den Übergang zur Fourier-Transformierten; vgl. Gl. (10). Somit gilt

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Theta}_S(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_S(x) e^{-ik\alpha x} dx = \int_S e^{-ik\alpha x} dx \\ \bar{\Theta}_L(\alpha) &= \bar{1} - \bar{\Theta}_S(\alpha) = \frac{2\pi}{k} \delta(\alpha) - \bar{\Theta}_S(\alpha) = \int_L e^{-ik\alpha x} dx. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Die Gln. (18) lassen sich im allgemeinen auf „singuläre Integralgleichungen vom Cauchyschen Typus“ zurückführen (s. die Beispiele weiter unten). Man erhält sie auch unmittelbar, indem man (17) mit  $e^{-ik\alpha'x}$  multipliziert und über  $-\infty < x < \infty$  integriert.

Mit Hilfe der unteren Zeile von Gl. (19) können wir die Gln. (18) auch in der Form

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}(\alpha) &= \frac{k}{2\pi} \sqrt{1-\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} \bar{\Theta}_L(\alpha-\alpha') d\alpha' \\ &\quad - ik \sqrt{1-\alpha^2} \bar{\Theta}_S(\alpha-\alpha_0) \end{aligned} \right\} \quad (20a)$$

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \bar{\Theta}_S(\alpha-\alpha') d\alpha' \quad (20b)$$

schreiben. Setzt man die Gl. (20b) in die erste Gl. (18) ein, und vertauscht die Integrationsreihenfolge<sup>12)</sup>, so folgt für  $\bar{\varphi}(\alpha)$  die „Fredholmsche Integralgleichung“ erster Art

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') K(\alpha, \alpha') d\alpha' = \bar{\Theta}_S(\alpha-\alpha_0) \quad (21)$$

mit dem „iterierten Kern“

$$K(\alpha, \alpha') = \frac{ki}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Theta}_S(\alpha-\alpha'') \bar{\Theta}_S(\alpha''-\alpha') \frac{d\alpha''}{\sqrt{1-\alpha''^2}}. \quad (22)$$

Dieselbe Integralgleichung (21) ergibt sich auch, wenn man in Gl. (7) die aus (10) folgende Darstellung

$$\varphi(x) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') e^{ik\alpha'x} d\alpha' \quad (23)$$

einsetzt, mit  $e^{-ik\alpha x}$  multipliziert sowie über  $S$  bezüglich  $x$  integriert. Auf diese Weise erhalten wir für den Kern  $K(\alpha, \alpha')$  die Darstellung

$$K(\alpha, \alpha') = \frac{ki}{2\pi} \int_S dx \int_S dx' e^{-ik(\alpha x - \alpha' x')} H_0^1(k|x-x'|). \quad (22')$$

4. Iterationsverfahren im Anschluß an die Kirchhoffsche Lösung. Andererseits können wir die Gln. (20a, b) dadurch formal iterativ zu lösen versuchen, daß wir mit

$$\bar{\varphi}_0(\alpha) = -ik \sqrt{1-\alpha^2} \bar{\Theta}_S(\alpha-\alpha_0) \quad (24)$$

<sup>12)</sup> Unter Beachtung der weiter unten angegebenen Vertauschungsformel.

beginnend aus (20b) und (20a) abwechselnd „höhere Näherungen“ berechnen. Aus (20b) ergibt sich so die nächste Näherung

$$\bar{\varphi}_1(\alpha) = + \frac{k^2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Theta}_S(\alpha - \alpha') \bar{\Theta}_S(\alpha' - \alpha_0) \sqrt{1 - \alpha'^2} d\alpha'; \quad (25)$$

dies wäre wieder rechts in (20a) einzusetzen und so fort. Dieses Iterationsverfahren ist insofern bemerkenswert, als es offenbar von der „Kirchhoffschen Näherung“ ausgeht [man vgl. (24) und (19)] und diese sukzessive verbessert. Allerdings ist aus dem Formalismus nicht ersichtlich, unter welchen Bedingungen diese Näherungen brauchbare Ergebnisse liefern werden (von Konvergenzfragen ganz abgesehen).

Man kann übrigens noch die ungeraden Näherungsschritte eliminieren. Dies erreicht man am einfachsten dadurch, daß man Gl. (20b) in (20a) einsetzt. Es ergibt sich nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\bar{\varphi}(\alpha) - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \hat{K}(\alpha, \alpha') d\alpha' = \bar{\varphi}_0(\alpha) \quad (26)$$

mit

$$\hat{K}(\alpha, \alpha') = \frac{k^2}{4\pi^2} \sqrt{1 - \alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Theta}_L(\alpha - \alpha'') \bar{\Theta}_S(\alpha'' - \alpha') \frac{d\alpha''}{\sqrt{1 - \alpha''^2}}. \quad (27)$$

Schreiben wir (26) abkürzend in der Form

$$(1 - \hat{K}) \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0, \quad (26')$$

so können wir formal nach  $\bar{\varphi}$  auflösen

$$\bar{\varphi} = (1 - \hat{K})^{-1} \bar{\varphi}_0 = \bar{\varphi}_0 + \hat{K} \bar{\varphi}_0 + \hat{K}^2 \bar{\varphi}_0 + \dots \quad (28)$$

Diese „Neumannsche Reihe“ liefert ersichtlich die geraden Schritte des oben angedeuteten Iterationsverfahrens.

5. Beispiele. a) *Halbebene*. Bei den aus Abb. 4 ersichtlichen Verhältnissen folgt aus (7) für den Flächenstrom

$$\int_0^{\infty} \varphi(x') H_0^1(k |x - x'|) dx' = -2i e^{ik\alpha_0 x}, \quad x \geq 0. \quad (29)$$

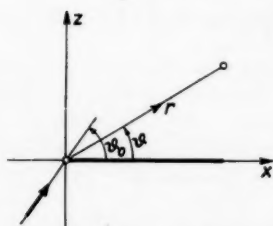


Abb. 4. Zur Theorie der Beugung an der Halbebene

Diese Integralgleichung ist vom Wiener-Hopfschen Typus, auf den wir im nächsten Paragraphen näher eingehen. Für die Fourier-Transformierte (Fernfeldamplitude)

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-ik\alpha x} dx$$

ergibt sich aus (11)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{\sqrt{1 - \alpha^2}} e^{ik\alpha x} d\alpha &= -e^{ik\alpha_0 x}, & x > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha) e^{ik\alpha x} d\alpha &= 0, & x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Zu den Gleichungen vom Typus (18) übergehend haben wir (30) mit  $e^{-ik\alpha'x}$  zu multiplizieren und über das entsprechende  $x$ -Intervall zu integrieren. Hierbei liefert die Grenze  $x \rightarrow \infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$  keinen Beitrag, wenn man dafür sorgt, daß  $\alpha$  einen positiven bzw. negativen Imaginärteil besitzt. Dies erreichen wir, indem wir bei der ersten Gl. (30) den  $\alpha$ -Integrationsweg etwas in die obere  $\alpha$ -Halbebene verschieben, bei der zweiten hingegen in die untere. Zum Schluß können wir den  $\alpha$ -Integrationsweg wieder mit der reellen Achse zusammenfallen lassen, müssen dann aber im Auge behalten, daß dem bei der  $x$ -Integration entstandenen Pol  $\alpha = \alpha'$  in der oberen bzw. unteren  $\alpha$ -Halbebene (durch einen unendlich kleinen Halbkreis) auszuweichen ist. Dies wollen wir durch einen entsprechenden Haken am Integralzeichen andeuten. Gl. (30) geht also damit (bei Vertauschung von  $\alpha$  und  $\alpha'$ ) in die Gestalt über

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} \frac{dx'}{\alpha' - \alpha} &= \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \frac{dx'}{\alpha' - \alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Der Haken unter der rechten Seite von (31) bedeutet, daß dem Pol  $\alpha = \alpha_0$  bei einer (später durchzuführenden) Integration in der unteren  $\alpha$ -Halbebene auszuweichen ist<sup>13)</sup>. Die singulären Integralgleichungen vom Typ (31) werden wir im nächsten Paragraphen eingehender betrachten.

b) *Spalt*. Hier besteht der Schirm aus zwei Halbebenen („Spaltbacken“) (Abb. 5). Bezeichnen wir die Flächenstromdichte auf der rechten Spaltbacke mit  $\varphi_1(x)$ , die auf der linken mit  $\varphi_2(x)$ , so ergibt sich aus (7)

$$\left\{ \int_{-\infty}^{-a} \varphi_2(x') + \int_a^{\infty} \varphi_1(x') \right\} H_0(k|x-x'|) dx' = -2i e^{ik\alpha_0 x}, \quad |x| > a$$

<sup>13)</sup> Man kann sich auch der geläufigen Bezeichnungswiese

$$\bar{\Theta}_s(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-ik\alpha x} dx = \frac{2\pi}{k} \delta_-(\alpha) = \frac{\pi}{2} \delta(\alpha) + \frac{1}{ik\alpha} \quad (31')$$

$$\bar{\Theta}_L(\alpha) = \int_{-\infty}^0 e^{-ik\alpha x} dx = \frac{2\pi}{k} \delta_+(\alpha) = \frac{\pi}{k} \delta(\alpha) - \frac{1}{ik\alpha}$$

mit  $\delta_+(\alpha) = \delta(-\alpha)$  bedienen. Die beim Einsetzen von (31') in (18) auftretenden singulären Integrale sind dann als Cauchysche Hauptwerte aufzufassen. Die im Text benutzte Symbolik

$$\bar{\Theta}_s(\alpha) = \frac{1}{ik\alpha}, \quad \bar{\Theta}_L(\alpha) = -\frac{1}{ik\alpha} = \bar{\Theta}_s(-\alpha) \quad (31'')$$

ist jedoch für das Folgende bequemer. Rechnet man für  $\bar{\Theta}_s$  bzw.  $\bar{\Theta}_L$  den Punkt  $\alpha = 0$  mit zur oberen bzw. unteren komplexen  $\alpha$ -Halbebene, so ist  $\bar{\Theta}_s$  bzw.  $\bar{\Theta}_L$  in der unteren bzw. oberen Halbebene holomorph.

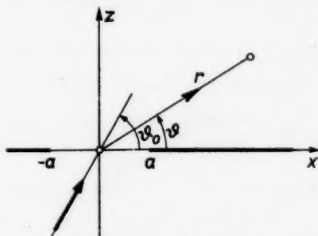


Abb. 5. Zur Theorie der Beugung am Spalt

oder nach einfachen Umformungen

$$\int_a^{\infty} \{ \varphi_1(x') H_0^+(k|x-x'|) + \varphi_2(-x') H_0^+(k|x+x'|) \} dx' = -2i e^{ik\alpha_0 x}, \quad (32a)$$

$x > a$

$$\int_a^{\infty} \{ \varphi_2(-x') H_0^+(k|x-x'|) + \varphi_1(x') H_0^+(k|x+x'|) \} dx' = -2i e^{-ik\alpha_0 x}, \quad (32b)$$

$x > a$

Gl. (32a) entspricht physikalisch der Beugung an der rechten Halbebene, wobei die Wechselwirkung mit der linken Halbebene durch den zweiten Term des Integranden zum Ausdruck kommt. In der Tat ist für  $ka \gg 1$   $H_0^+(k|x+x'|)$  für  $x, x' \geq a$  klein gegen  $H_0^+(k|x-x'|)$  (der erste Ausdruck ist  $\sim (ka)^{-1}$ , der zweite wird für  $x' = x$  logarithmisch singular). Entsprechend bezieht sich die zweite Gl. (32) auf die Beugung an der linken Halbebene.

Die simultanen Integralgleichungen (32) lassen sich leicht entkoppeln, setzt man nämlich

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(x) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(-x) \\ \chi_2(x) &= \varphi_1(x) - \varphi_2(-x), \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

so folgt durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Gln. (32)

$$\left. \begin{aligned} \int_a^{\infty} \chi_1(x') \{ H_0^+(k|x-x'|) + H_0^+(k|x+x'|) \} dx' &= -4i \cos k\alpha_0 x, \\ \int_a^{\infty} \chi_2(x') \{ H_0^+(k|x-x'|) - H_0^+(k|x+x'|) \} dx' &= 4 \sin k\alpha_0 x, \end{aligned} \right\} \quad (33')$$

$x > a$

Für die Fourier-Transformierten

$$\bar{\varphi}_1(\alpha) = \int_a^{\infty} \varphi_1(x) e^{-ik\alpha_0 x} dx, \quad \bar{\varphi}_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{-a} \varphi_2(x) e^{-ik\alpha_0 x} dx \quad (34)$$

mit

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \bar{\varphi}_1(\alpha) + \bar{\varphi}_2(\alpha) \quad (35)$$

ergibt sich nach (11)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{ik\alpha_0 x} d\alpha &= -e^{ik\alpha_0 x}, & |x| > a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha) e^{ik\alpha_0 x} d\alpha &= 0, & |x| < a. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Die zweite Gl. (36) ist mit den beiden folgenden äquivalent:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_1(\alpha) e^{ik\alpha_0 x} d\alpha &= 0, & x < a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_2(\alpha) e^{ik\alpha_0 x} d\alpha &= 0, & x > -a. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Den Übergang zu den Gln. (18) vollziehen wir, indem wir die erste Gl. (36) für  $x > a$  und die erste Gl. (37) in derselben Weise behandeln, wie die ent-

sprechenden Gln. (30):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_1(\alpha') + \bar{\varphi}_2(\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= \frac{e^{i\varepsilon\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_1(\alpha') \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (38a)$$

mit  $\varepsilon = ka$ . Nach der gleichen Methode folgt schließlich aus der zweiten Gl. (37) und der ersten Gl. (36) für  $x < -a$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_2(\alpha') \frac{e^{-i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_2(\alpha') + \bar{\varphi}_1(\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} \frac{e^{-i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= \frac{e^{-i\varepsilon\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} \end{aligned} \right\} \quad (38b)$$

Die Gln. (38a) bzw. (38b) betreffen hier wieder die Beugung an der rechten bzw. linken Halbebene, wobei jedoch neben der einfallenden Welle auch eine von der jeweils anderen Halbebene herrührende Welle auftritt. Ersetzt man in (38b)  $\alpha$  durch  $-\alpha$  und  $\alpha_0$  durch  $-\alpha_0$  sowie  $\alpha'$  durch  $-\alpha'$ , so erkennt man durch Vergleich mit (38a) das Bestehen der Relation

$$\varphi_2(\alpha_0, \alpha) = \varphi_1(-\alpha_0, -\alpha), \quad (39)$$

also

$$\varphi(\alpha_0, \alpha) = \varphi(-\alpha_0, -\alpha). \quad (40)$$

Andererseits kann man (36) auch direkt nach dem Muster von (18) umformen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \\ = - \left\{ \frac{e^{-i\varepsilon(\alpha - \alpha_0)}}{\alpha - \alpha_0} - \frac{e^{i\varepsilon(\alpha - \alpha_0)}}{\alpha - \alpha_0} \right\} \\ = -2\pi i \left\{ \delta(\alpha - \alpha_0) - \frac{1}{\pi} \frac{\sin \varepsilon(\alpha - \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \right\} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

was mit (38a, b) äquivalent<sup>14)</sup> ist. Wir werden jedoch (38a, b) wegen der zu (31) analogen Gestalt bevorzugen. Schließlich erhält man für die Fourier-

<sup>14)</sup> Das Auftreten der  $\delta$ -Funktion rechts in (41) läßt sich leicht vermeiden durch Einführen einer neuen Größe  $\hat{\varphi}(\alpha)$  gemäß

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \hat{\varphi}(\alpha) - 2\pi i \sqrt{1-\alpha^2} \delta(\alpha - \alpha_0); \quad (41')$$

damit geht (41) über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hat{\varphi}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\varphi}(\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\alpha') \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 2i \sqrt{1-\alpha_0^2} \frac{\sin \varepsilon(\alpha_0 - \alpha)}{\alpha_0 - \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (41'')$$

Die  $\delta$ -Funktion in (41') trägt den geometrisch-optischen Verhältnissen Rechnung (s. weiter unten). Die erste Integralgleichung (41') wird in der Literatur als Batemansche Gleichung bezeichnet; vgl. Titchmarsh, l. c. S. 349; Schmeidler, l. c. S. 384.

Transformierten

$$\left. \begin{aligned} \bar{\chi}_1(\alpha) &= \int_a^\infty \chi_1(x) e^{-ik\alpha x} dx = \bar{\varphi}_1(\alpha) + \bar{\varphi}_2(-\alpha) \\ \bar{\chi}_2(\alpha) &= \int_a^\infty \chi_2(x) e^{-ik\alpha x} dx = \bar{\varphi}_1(\alpha) - \bar{\varphi}_2(-\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

aus (33') die dualen Integralgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_1(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cos k\alpha x d\alpha &= -\cos k\alpha_0 x, & x > a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}_1(\alpha) e^{ik\alpha x} d\alpha &= 0, & x < a \end{aligned} \right\} \quad (44a)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_2(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sin k\alpha x d\alpha &= -\sin k\alpha_0 x, & x > a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}_2(\alpha) e^{ik\alpha x} d\alpha &= 0, & x < a, \end{aligned} \right\} \quad (44b)$$

von denen wir zu den singulären Integralgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_1(\alpha') + \bar{\chi}_1(-\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= \frac{e^{i\varepsilon\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} + \frac{e^{-i\varepsilon\alpha_0}}{\alpha + \alpha_0} \\ \oint_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}_1(\alpha') \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_2(\alpha') - \bar{\chi}_2(-\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= \frac{e^{i\varepsilon\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} - \frac{e^{-i\varepsilon\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} \\ \oint_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}_2(\alpha') \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45b)$$

übergehen.



Abb. 6. Zur Theorie der Beugung am Streifengitter

c) *Streifengitter*. Wir betrachten ein Gitter aus  $N$  Spalten der Breite  $2a$  und dem Abstand  $b$  (Gitterkonstante, s. Abb. 6). Für dieses gilt nach (19)

$$\bar{\Theta}_L(\alpha) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{-a+\nu b}^{a+\nu b} e^{-ik\alpha x} dx = \frac{2}{k} \frac{\sin \varepsilon \alpha}{\alpha} \sum_{\nu=0}^{N-1} e^{-i\nu \eta \alpha} \quad (46)$$

mit  $ka = \varepsilon$ ,  $kb = \eta$ ; also die bekannte „Kirchhoffsche Gitterformel“<sup>15)</sup>

$$\bar{\Theta}_L(\alpha) = \frac{2}{k} \frac{\sin \varepsilon \alpha}{\alpha} \frac{1 - e^{-iN\eta\alpha}}{1 - e^{-i\eta\alpha}} = \frac{2}{k} \frac{e^{-\frac{iN\eta\alpha}{2}}}{e^{-\frac{i\eta\alpha}{2}}} \frac{\sin \varepsilon \alpha}{\alpha} \frac{\sin \frac{N\eta\alpha}{2}}{\sin \frac{\eta\alpha}{2}}. \quad (46')$$

Ferner gilt

$$\bar{\Theta}_S(\alpha) = \frac{2\pi}{k} \delta(\alpha) - \frac{2}{k} \frac{\sin \varepsilon \alpha}{\alpha} \frac{1 - e^{-iN\eta\alpha}}{1 - e^{-i\eta\alpha}}. \quad (46a)$$

(44a) Die Fernfeldamplitude der Gitterstrahlung ist nach Gl. (18) damit durch die simultanen Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} \frac{1 - e^{-iN\eta(\alpha' - \alpha)}}{1 - e^{-i\eta(\alpha' - \alpha)}} d\alpha' \\ = -\pi \delta(\alpha - \alpha_0) + \frac{\sin \varepsilon(\alpha - \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \frac{1 - e^{-iN\eta(\alpha - \alpha_0)}}{1 - e^{-i\eta(\alpha - \alpha_0)}} \end{aligned} \quad (47a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} \frac{1 - e^{iN\eta(\alpha' - \alpha)}}{1 - e^{i\eta(\alpha' - \alpha)}} d\alpha' = 0 \quad (47b)$$

festgelegt. Für das komplementäre Gitter ( $N$  Streifen der Breite  $2a$ , Gitterkonstante  $b$ ) gilt entsprechend

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} \frac{1 - e^{iN\eta(\alpha' - \alpha)}}{1 - e^{i\eta(\alpha' - \alpha)}} d\alpha' \\ = -\frac{\sin \varepsilon(\alpha - \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \frac{1 - e^{-iN\eta(\alpha - \alpha_0)}}{1 - e^{-i\eta(\alpha - \alpha_0)}} \end{aligned} \right\} \quad (48a)$$

$$\varphi(\alpha) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} \frac{1 - e^{iN\eta(\alpha' - \alpha)}}{1 - e^{i\eta(\alpha' - \alpha)}} d\alpha' = 0. \quad (48b)$$

Diese Formeln vereinfachen sich etwas, wenn  $N \rightarrow \infty$  geht: Verschieben wir z. B. in (48) den Integrationsweg etwas in die obere  $\alpha'$ -Halbebene, so verschwindet der Term mit  $e^{iN\eta\alpha'}$  für  $N \rightarrow \infty$  und es bleibt (wir lassen anschließend den Integrationsweg wieder mit der reellen  $\alpha$ -Achse zusammenfallen)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} \frac{d\alpha'}{1 - e^{i\eta(\alpha' - \alpha)}} = -\frac{\sin \varepsilon(\alpha - \alpha_0)}{(\alpha - \alpha_0) [1 - e^{i\eta(\alpha - \alpha_0)}]} \quad (48'a)$$

$$\bar{\varphi}(\alpha) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} \frac{d\alpha'}{1 - e^{i\eta(\alpha' - \alpha)}} = 0. \quad (48'b)$$

<sup>15)</sup> Liegen  $N_1$  Spalte links vom Nullpunkt der  $x$ -Achse,  $N_2 - 1$  rechts davon ( $N_1 + N_2 = N$ ), so gilt

$$\bar{\Theta}_L(\alpha) = \frac{2}{k} \frac{\sin \varepsilon \alpha}{\alpha} \frac{e^{iN_1\eta\alpha} - e^{-iN_2\eta\alpha}}{1 - e^{-i\eta\alpha}}; \quad (46')$$

(46) in dieser Gestalt bietet die Formel die Möglichkeit, die Zahl der Spalte nach beiden Seiten  $\rightarrow \infty$  wachsen zu lassen.

Hier bedeutet der Haken links, daß den sämtlichen Polen  $\alpha' = \alpha + n \cdot \frac{2\pi}{\eta}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) durch (unendlich) kleine Halbkreise in der oberen  $\alpha'$ -Halbebene auszuweichen ist. (Entsprechend ist auf der rechten Seite den Polen  $\alpha = \alpha_0 + n \frac{2\pi}{\eta}$  bei einer nachfolgenden Integration in der unteren  $\alpha$ -Halbebene auszuweichen.)

Wir wollen noch eine Darstellung geben, bei der der Einfluß des einzelnen Gitterelements und die Wechselwirkung dieser Elemente untereinander explizit hervortritt. Betrachten wir etwa das komplementäre Gitter, so ergibt sich zunächst für die Flächenstromdichten  $\varphi_\nu(x)$  ( $\nu = 0, 1, \dots, N-1$ ) auf den einzelnen Streifen aus (7)

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{-a+\nu b}^{a+\nu b} \varphi_\nu(x') H_0^+(k|x-x'|) dx' = -2i e^{ik\alpha_0 x}, \quad x \in \sum_{\nu=0}^{N-1} S_\nu, \quad (49)$$

wobei  $S_\nu$  das Intervall

$$S_\nu = -a + \nu b \leq x \leq a + \nu b \quad (50)$$

bedeutet. Oder

$$\int_{-a}^a \sum_{\nu=0}^{N-1} \varphi_\nu(x' + \nu b) H_0^+(k|x-x'-\nu b|) dx' = -2i e^{ik\alpha_0 x}, \quad x \in \sum_{\nu=0}^{N-1} S_\nu. \quad (49')$$

Für die Fourier-Transformierten

$$\varphi_\nu(x) = \int_{-a+\nu b}^{a+\nu b} \varphi_\nu(x) e^{-ik\alpha x} dx \quad (51)$$

ergeben sich also gemäß (11) die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{ik\alpha x} dx &= -e^{ik\alpha_0 x}, \quad x \in \sum_{\nu=0}^{N-1} S_\nu \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_\nu(x) e^{ik\alpha x} dx &= 0, \quad x \notin S_\nu \quad \text{für } \nu = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Die in (48) auftretende Fernfeldamplitude der Gitterstrahlung ergibt sich aus den  $\bar{\varphi}_\nu(x)$  durch Superposition

$$\bar{\varphi}(x) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \bar{\varphi}_\nu(x). \quad (53)$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit  $e^{-ik\alpha' x}$  und integriert die erste über  $x \in S_\nu$ , die zweite über  $x \notin S_\nu$ , so folgt

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(x')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} e^{i\nu\eta\alpha'} \frac{\sin \varepsilon(x'-\alpha)}{\alpha'-\alpha} d\alpha' &= -e^{i\nu\eta\alpha_0} \frac{\sin \varepsilon(x-\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0} \\ \bar{\varphi}_\nu(x) e^{i\nu\eta\alpha} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_\nu(x') e^{i\nu\eta\alpha'} \frac{\sin \varepsilon(x'-\alpha)}{\alpha'-\alpha} d\alpha' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

jeweils für  $\nu = 0, 1, \dots, N-1$ ; das letzte Gleichungssystem schreiben wir in der Form

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_{\nu}(\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} e^{i\nu\eta\alpha'} \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= -e^{i\nu\eta\alpha} \frac{\sin \varepsilon(\alpha - \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq \nu}}^{N-1} \frac{\bar{\varphi}_{\mu}(\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} e^{i\nu\eta\alpha'} \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' & \\ \bar{\varphi}_{\nu}(\alpha) e^{i\nu\eta\alpha} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_{\nu}(\alpha') e^{i\nu\eta\alpha'} \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (54')$$

( $\nu = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ).

Ist nur ein einziger Streifen vorhanden, so gilt<sup>16)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\alpha')}{\sqrt{1-\alpha'^2}} \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= -\frac{\sin \varepsilon(\alpha - \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \\ \varphi(\alpha) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha') \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

von den  $N$  simultanen Gln. (54') beschreibt also die  $\nu$ -te die Beugung am  $\nu$ -ten Streifen, wobei die Wechselwirkung mit den anderen  $N-1$  Streifen durch das zweite Glied auf der rechten Seite zum Ausdruck kommt. (Der Faktor  $e^{i\nu\eta\alpha}$  deutet an, daß der  $\nu$ -te Streifen um  $\nu b$  nach rechts verschoben ist.)

## § 2. Zur Theorie singulärer Integralgleichungen

Für Integralgleichungen vom Typus (29) haben Wiener und Hopf<sup>17)</sup> eine funktionentheoretische Lösungsmethode entwickelt, die seit dem letzten Krieg häufig in der Beugungstheorie angewendet wird<sup>18)</sup>. Andererseits ist in neuerer Zeit die Theorie der singulären Integralgleichungen vom Cauchyschen

<sup>16)</sup> Vgl. das zum Streifen komplementäre Problem des Spalts Gl. (41).

<sup>17)</sup> N. Wiener und E. Hopf, Berl. Ber. 696 (1931). Vgl. auch R. Paley und N. Wiener, Fourier-Transforms in the Complex Domain. New York 1934; Titchmach, l. c. S. 339—42; V. A. Fock, Matem. Sbornik 1, 14 (1944). *Anmerkung bei der Korrektur:* Inzwischen ist die zusammenfassende Darstellung von B. Noble, Methods based on Wiener-Hopf-Technique for the Solution of Boundary-Value-Problems for Partial Differential-Equations, Pergamon Press 1958, erschienen. Die zahlreichen Anwendungen in diesem Buch sind hauptsächlich der Theorie der Beugung entnommen und es finden sich mehrere Parallelen zu der vorliegenden Arbeit, auf die wir jedoch im einzelnen nicht eingehen können.

<sup>18)</sup> Auf die Beugung an der Halbebene wurde die Wiener-Hopf-Methode von E. T. Copson, Quart. J. Math. 17, 19 (1946) angewandt. Vgl. auch Baker-Copson, l. c. S. 168—177. Kompliziertere Beugungs- bzw. Ausstrahlungsprobleme (offene Wellenleiter) werden mit dieser Methode z. B. behandelt bei J. F. Carlson und A. E. Heins, Quart. Appl. Math. 4, 313 (1947), 5, 82 (1947); A. E. Heins, ebd. 5, 157 (1947), 6, 218 (1948), 8, 281 (1950); A. E. Heins und H. Feshbach, J. Math. Phys. 26, 143 (1947); H. Levine und J. Schwinger, Physic. Rev. 73, 383 (1948); L. A. Vainstein (Six Papers 1948—50 translated from the Russian by J. Shmoys), New York Research Rep. EM 63 (1954).

Typus namentlich von Muskhelishvili und seiner Schule systematisch ausgebaut worden<sup>19)</sup>. Die dabei im Vordergrund stehende Methode der Cauchyschen Integrale enthält das Wiener-Hopf-Verfahren als Spezialfall<sup>20)</sup>. Wir wollen hier die Grundzüge der Theorie der singulären Integralgleichungen in einer für die Anwendung auf Beugungsprobleme geeigneten (und spezialisierten) Form skizzieren (man vgl. die zitierte Literatur).

1. Cauchysche Integrale. Diese haben die Form

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \quad (1)$$

( $\alpha$  komplex).

$\Phi(\alpha)$  ist eine sowohl in der oberen  $\alpha$ -Halbebene  $S^+$  als auch in der unteren  $S^-$  holomorphe Funktion (einschließlich des unendlich fernen Punktes)<sup>21)</sup>. Nähert sich jedoch  $\alpha$  aus  $S^+$  bzw. aus  $S^-$  der reellen Achse, so ergeben sich verschiedene Randwerte:

$$\Phi^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = \frac{1}{2} \varphi(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \quad (2a)$$

bzw.

$$\Phi^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = -\frac{1}{2} \varphi(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha'. \quad (2b)$$

Dabei bedeutet das Integral mit dem Balken rechts in (2) den Cauchyschen Hauptwert<sup>22)</sup>.  $\Phi(\alpha)$  ist also eine stückweise holomorphe Funktion<sup>23)</sup>, die beim Überschreiten der reellen Achse den Sprung

$$\Phi^+(\alpha) - \Phi^-(\alpha) = \varphi(\alpha) \quad (3)$$

( $\alpha$  reell)

<sup>19)</sup> Man vgl. die Monographie von N. J. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Groningen 1953, sowie W. D. Kupradse, *Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen*, Berlin 1956, Kap. 5 (beides Übersetzungen aus dem Russischen).

<sup>20)</sup> Die enge Beziehung zwischen dem Wiener-Hopf-Verfahren und der Methode der singulären Integralgleichungen vom Cauchyschen Typ scheint in der Literatur bisher nicht beachtet worden zu sein.

<sup>21)</sup> Das Integral (1) soll etwa im gewöhnlichen Sinne existieren [hinreichende Bedingung:  $\varphi(\alpha) = O(|\alpha|^{-\mu})$ ,  $\mu > 0$  für  $|\alpha| \rightarrow \infty$ ] oder als Hauptwert

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \dots$  [hinreichende Bedingung:  $\varphi(\alpha) = \text{const} + O(|\alpha|^{-\mu})$ ,  $\mu > 0$  für  $|\alpha| \rightarrow \infty$ ].

<sup>22)</sup>  $\int \dots = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{a-\epsilon}^{a-\epsilon} \dots + \int_{a+\epsilon}^{a+\epsilon} \dots \right]$ ; er existiert z. B., falls  $\varphi(\alpha)$  einer Hölder-Bedingung genügt.

<sup>23)</sup> Darunter soll im folgenden stets eine analytische Funktion verstanden werden, die sowohl in  $S^+$  als auch  $S^-$  (jeweils einschließlich der reellen Achse sowie des unendlich fernen Punktes) holomorph ist, jedoch bei Annäherung an die reelle Achse aus  $S^+$  bzw.  $S^-$  verschiedene Randwerte annimmt.

aufweist. Umgekehrt unterscheidet sich jede analytische Funktion mit diesen Eigenschaften von (1) nur durch eine Konstante (da die Differenz zweier solcher Funktionen in der ganzen  $\alpha$ -Ebene holomorph ist). Gl. (1) löst also das Sprungwertproblem (3) für stückweise holomorphe Funktionen<sup>24)</sup>.

2. Vertauschungsformel für Cauchysche Integrale. Ist die Funktion  $\varphi(\alpha)$  in (2) ihrerseits ein Cauchysches Integral der Form (2a) oder (2b), so läßt sich die Integrationsreihenfolge nicht ohne weiteres vertauschen. Wir wollen hier die Regel, nach der die Vertauschung zweier Cauchyscher Integrale vorzunehmen ist, kurz ableiten, da wir sie im folgenden benötigen. Mit Hilfe des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} = \pm \pi i \quad (4)$$

(wobei das obere bzw. untere Vorzeichen für den linken bzw. rechten Haken gilt) können wir zunächst folgende Umformung vornehmen

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha') - \varphi(\alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \pm \pi i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) d\alpha. \quad (5)$$

Damit ist die Singularität im Integranden behoben; wir können daher die Integrationsreihenfolge im ersten Term rechts vertauschen. Mit der Substitution  $\alpha' - \alpha = \alpha''$  ergibt sich also

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha') - \varphi(\alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha'' + \alpha) - \varphi(\alpha)}{\alpha''} d\alpha'' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha''}{\alpha''} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(\alpha'' + \alpha) - \varphi(\alpha)] d\alpha = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

da das innere Integral verschwindet. Damit folgt aus (5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = \pm \pi i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) d\alpha. \quad (5')$$

Nach demselben Verfahren können wir umformen

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \varphi(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \varphi(\alpha) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha') - \varphi(\alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \pm \pi i \varphi(\alpha) \right\} \quad (7)$$

<sup>24)</sup> Im folgenden wollen wir die analytische Fortsetzung der Randwerte  $\Phi^+(\alpha)$  bzw.  $\Phi^-(\alpha)$  stückweise holomorpher Funktionen in die obere bzw. untere Halbebene hinein ebenfalls mit  $\Phi^+(\alpha)$  bzw.  $\Phi^-(\alpha)$  bezeichnen.

und die Reihenfolge beim Doppelintegral rechts vertauschen

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x') - \varphi(x)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha' \left\{ \varphi(x') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{\alpha' - \alpha} d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x) \varphi(x)}{\alpha' - \alpha} d\alpha \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha' \varphi(x') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{\alpha' - \alpha} d\alpha \mp \pi i \psi(x') \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

dabei haben wir in der zweiten Zeile das innere Integral in zwei singuläre Integrale aufgespalten, die wir in beliebiger (aber beidemal gleicher) Weise definieren können, da ihre Differenz ein reguläres Integral (ohne Pol im Integranden) ist. Ferner ergibt sich die dritte Zeile aus der zweiten bei Beachtung von (5'). Setzt man (8) in (7) ein, so folgt die Vertauschungsformel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha' \varphi(x') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{\alpha' - \alpha} d\alpha \quad (7')$$

(wobei die linken bzw. rechten Haken auf beiden Seiten korrespondieren). Man hat also bei der Vertauschung der Integrationsreihenfolge jeweils den Haken „umzuklappen“. Diese Regel gilt auch dann, wenn beide Integrale vom Cauchyschen Typ sind. Dies folgt sofort, wenn wir in (7') links das innere Integral durch

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x') d\alpha'}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')} = \frac{1}{\alpha'' - \alpha} \left\{ \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' - \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x')}{\alpha' - \alpha''} d\alpha' \right\} \quad (9)$$

ersetzen (der Doppelhaken am Integral links deutet an, daß den beiden Polen  $\alpha$  und  $\alpha'$  auf der reellen  $\alpha''$ -Achse in der unteren Halbebene ausgewichen werden soll). Da (9) für  $\alpha'' = \alpha$  regulär ist, ergibt sich aus (7') sinngemäß (wir vertauschen die beiden Seiten der Gleichung)

$$\left. \begin{aligned} & \oint_{-\infty}^{\infty} d\alpha' \frac{\varphi(x')}{\alpha' - \alpha} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x'')}{\alpha'' - \alpha'} d\alpha'' = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha'' \psi(x'') \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x') d\alpha'}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')}, \\ & \text{ebenso} \\ & \oint_{-\infty}^{\infty} d\alpha' \frac{\varphi(x')}{\alpha' - \alpha} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x'')}{\alpha'' - \alpha'} d\alpha'' = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha' \psi(x'') \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x') d\alpha'}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Dies ist die gesuchte Vertauschungsformel für Cauchysche Integrale. Dabei ist darauf zu achten, daß nur solche Integrale vertauscht werden, die verschiedene Haken haben. Andernfalls treten beim Umklappen der Haken Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x') d\alpha'}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')} = \frac{1}{\alpha'' - \alpha} \left\{ \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' - \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x')}{\alpha' - \alpha''} d\alpha' \right\} \quad (9')$$

auf, die an der Stelle  $\alpha'' = \alpha$  einen Pol haben. Hat man Integrale mit gleichen Haken zu vertauschen, so ist es zweckmäßig, zunächst einen der Haken mit Hilfe von (3) umzuklappen (von diesen Regeln werden wir im folgenden stillschweigend Gebrauch machen).

Geht man mit Hilfe von (2a, b) von den Hakenintegralen zu den Cauchy'schen Hauptwerten über, so folgt aus (10)

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha' \frac{\varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\alpha'')}{\alpha'' - \alpha'} d\alpha'' &= -\pi^2 \varphi(\alpha) \psi(\alpha) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha'' \psi(\alpha'') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha') d\alpha'}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')} & \end{aligned} \right\} (10')^{25}$$

Als Beispiel betrachten wir (10) für  $\varphi(\alpha) = \text{const}$ , dann folgt wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha'}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots = \int_{-\infty}^{\infty} \dots = 0 \quad (11)$$

(Residuensatz)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\alpha'')}{\alpha'' - \alpha'} d\alpha'' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\alpha'')}{\alpha'' - \alpha'} d\alpha'' = 0 \quad (12)$$

und aus (10')

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\alpha'')}{\alpha'' - \alpha'} d\alpha'' = -\pi^2 \psi(\alpha). \quad (12')$$

Die Gl. (12') können wir auch in der Form schreiben

$$\left. \begin{aligned} \hat{\psi}(\alpha) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \\ \psi(\alpha) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\psi}(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha', \end{aligned} \right\} (12'')$$

wobei je eine der Gln. (12'') die andere zur Folge hat (Hilbert-Transformation).

<sup>25</sup> Diese Formel, die in der Literatur häufig als Poincaré-Bertrandsche Vertauschungsformel bezeichnet wird, gilt [ebenso wie (10)] auch für beliebige offene oder geschlossene glatte Bögen in der komplexen Ebene. Für unsere Zwecke ist jedoch die Verwendung von Hakenintegralen zweckmäßiger. Man kann (10) auch in der Form

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha' \varphi(\alpha') \delta_{\pm}(\alpha' - \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\alpha'') \delta_{\mp}(\alpha'' - \alpha') d\alpha'' \\ = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha'' \psi(\alpha'') \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha') \delta_{\pm}(\alpha' - \alpha) \delta_{\pm}(\alpha' - \alpha'') d\alpha' \end{aligned} \right\} (10'')$$

schreiben.

3. Das Lösungsverfahren. In der Theorie der singulären Integralgleichungen wird die Gleichung

$$A(\alpha) \varphi(\alpha) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\alpha') \varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = f(\alpha) \quad (13)$$

als Hauptgleichung bezeichnet<sup>26)</sup> [wo  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$  und  $f(\alpha)$ , gegeben und  $\varphi(\alpha)$  gesucht ist]. Demgegenüber soll hier das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha') \varphi(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= f(\alpha) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= g(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

in den Vordergrund gestellt werden, auf das sich (13) zurückführen läßt (s. weiter unten)<sup>27)</sup>. Gl. (14) tritt nämlich bei allen Einkantenproblemen auf.

Die Inhomogenitäten  $f(\alpha)$  bzw.  $g(\alpha)$  müssen hier wegen (12) den Beziehungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = 0 \quad (15)$$

genügen. Das bedeutet funktionentheoretisch, daß  $f(\alpha)$  bzw.  $g(\alpha)$  die für reelle  $\alpha$  sich ergebenden Randwerte analytischer Funktionen sein müssen, die in  $S^-$  bzw.  $S^+$  holomorph sind und dort für  $|\alpha| \rightarrow \infty$  verschwinden (die Annäherung an die reelle Achse soll aus  $S^-$  bzw.  $S^+$  erfolgen). Wir wollen dafür kurz sagen,  $f(\alpha)$  bzw.  $g(\alpha)$  müssen in  $S^-$  bzw.  $S^+$  holomorph sein (diese Sprechweise behalten wir auch in den folgenden analogen Fällen bei). Mit Hilfe von (3) können wir (15) auch in der Gestalt schreiben

$$\left. \begin{aligned} f(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \\ g(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \end{aligned} \right\} \quad (15')$$

(man bestätigt durch analytische Fortsetzung leicht, daß diese Funktionen in  $S^-$  bzw.  $S^+$  holomorph sind). Mit Hilfe von (15') kann man nun (14) auch

<sup>26)</sup> Das zu entwickelnde Lösungsverfahren läßt sich auch für eine beliebige Anzahl offener oder geschlossener Bögen durchführen. Dadurch reicht die Theorie über den hier betrachteten Spezialfall bedeutend hinaus.

<sup>27)</sup> Umgekehrt ist (14) mit

$$[a - L(\alpha)] \varphi(\alpha) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [a + L(\alpha')] \frac{\varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = 2 [f(\alpha) + a g(\alpha)] \quad (13')$$

äquivalent ( $a$  beliebige Konstante  $\neq 0$ ).

die Form geben<sup>28)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [L(\alpha') \varphi(\alpha') + f(\alpha')] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(\alpha') - g(\alpha')] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14')$$

Die eckige Klammer in der oberen bzw. unteren Gl. (14') muß also in  $S^+$  bzw.  $S^-$  holomorph sein. Daran knüpft sich das folgende Lösungsverfahren: Nach dem eben Gesagten gilt

$$\left. \begin{aligned} L(\alpha) \varphi(\alpha) + f(\alpha) &= \Phi_1^+(\alpha) \\ \varphi(\alpha) - g(\alpha) &= \Phi_2^-(\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

( $\alpha$  reell)

wobei  $\Phi_1^+(\alpha)$  bzw.  $\Phi_2^-(\alpha)$  die Randwerte zweier zunächst beliebiger in  $S^+$  bzw.  $S^-$  holomorpher Funktionen  $\Phi_1(\alpha)$  bzw.  $\Phi_2(\alpha)$  sind (über das Verhalten in der jeweils anderen Halbebene braucht nichts vorausgesetzt zu werden). Eliminiert man  $\varphi(\alpha)$  aus (15), so folgt

$$\Phi_1^+(\alpha) - L(\alpha) \Phi_2^-(\alpha) = f(\alpha) + L(\alpha) g(\alpha); \quad (16)$$

führt man nun die stückweise holomorphe Funktion

$$\Phi(\alpha) = \begin{cases} \Phi_1(\alpha) & \alpha \in S^+ \\ \Phi_2(\alpha) & \alpha \in S^- \end{cases} \quad (15')$$

ein, so ergibt sich für diese aus (16)

$$\Phi^+(\alpha) - L(\alpha) \Phi^-(\alpha) = f(\alpha) + L(\alpha) g(\alpha). \quad (16')$$

$\Phi(\alpha)$  ist daher so zu bestimmen, daß die Randwerte  $\Phi^+(\alpha)$  und  $\Phi^-(\alpha)$  der Relation (16') genügen (Hilbert-Problem der Funktionentheorie). Bei der Lösung dieses Problems kommt es darauf an,  $L(\alpha)$  in der Form

$$L(\alpha) = \frac{L^+(\alpha)}{L^-(\alpha)} \quad (17)$$

aufzuspalten, wobei  $L^+(\alpha)$  bzw.  $L^-(\alpha)$  in  $S^+$  bzw.  $S^-$  holomorph ist und dort keine Nullstellen hat<sup>29)</sup>. Zu diesem Zweck bilden wir ( $\alpha$  reell)

$$\ln L(\alpha) = \ln L^+(\alpha) - \ln L^-(\alpha) \quad (18)$$

(unter  $\ln$  irgendeinen Zweig des Logarithmus verstanden), wobei wir der Kürze halber im folgenden stets annehmen wollen, daß für reelle  $\alpha$   $L(\alpha)$  weder Nullstellen noch Pole besitzt und  $\ln L(\alpha)$  eindeutig ist<sup>30)</sup>. Genauer

<sup>28)</sup> Schreibt man Gl. (14) von vornherein in der Gestalt (14'), so können  $f(\alpha)$  und  $g(\alpha)$  beliebig sein, brauchen also nicht der Bedingung (15) zu genügen.

<sup>29)</sup> Offensichtlich löst dann

$$\Phi_0(\alpha) = \begin{cases} L^+(\alpha) & \alpha \in S^+ \\ L^-(\alpha) & \alpha \in S^- \end{cases}$$

das homogene Hilbert-Problem (16'). Die Aufspaltung (17) spielt auch beim Wiener-Hopf-Verfahren eine wesentliche Rolle und wird dort häufig als Faktorisierung bezeichnet.

<sup>30)</sup> Für allgemeinere Fälle vgl. z. B. Titchmarsh, l. c.; Muskhelishvili, l. c. S. 88–91. (Ist  $L(\alpha)$  nur für reelle  $\alpha$  gegeben, so läßt sich die Theorie durchführen, falls  $L(\alpha)$  einer Hölder-Bedingung genügt.)

gesagt soll  $L(\alpha)$  in einem beliebig schmalen, die reelle Achse enthaltenden Streifen holomorph sein und dort keine Nullstellen besitzen, sowie der Bedingung  $\operatorname{arc} L(\alpha) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$  genügen. Nehmen wir an, daß die Funktion

$$\Gamma(\alpha) = \begin{cases} \ln L^+(\alpha) & \alpha \in S^+ \\ \ln L^-(\alpha) & \alpha \in S^- \end{cases} \quad (19)$$

stückweise holomorph ist, so folgt — da  $\Gamma(\alpha)$  nach (18) beim Überqueren der reellen Achse die Unstetigkeit

$$\Gamma^+(\alpha) - \Gamma^-(\alpha) = \ln L(\alpha) \quad (20)$$

besitzt — nach (3) und (1) für die Lösung dieses Sprungwertproblems (bis auf eine für das folgende irrelevante Konstante,  $\alpha$  komplex):

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln L(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha}. \quad (21)$$

Mit (21) und (19) ist die gesuchte Aufspaltung gefunden

$$\left. \begin{aligned} L^+(\alpha) &= e^{\Gamma^+(\alpha)} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln L(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \right\} \\ L^-(\alpha) &= e^{\Gamma^-(\alpha)} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln L(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

in der Tat ist  $L^+(\alpha)$  bzw.  $L^-(\alpha)$  in  $S^+$  bzw.  $S^-$  holomorph und frei von Nullstellen. Ferner gibt sich aus (22) mit (3)

$$\frac{L^+(\alpha)}{L^-(\alpha)} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln L(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln L(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \right\} = L(\alpha).$$

Über das Verhalten von  $L^+(\alpha)$  bzw.  $L^-(\alpha)$  im Unendlichen von  $S^+$  bzw.  $S^-$  — das an bestimmte Voraussetzungen über  $L(\alpha)$  gebunden ist<sup>31)</sup> — wollen wir hier stets voraussetzen, daß es von der folgenden Form sei

$$\left. \begin{aligned} L^+(\alpha) &= O(\alpha^{\gamma_1}), & L^-(\alpha) &= O(\alpha^{\gamma_2}), & |\alpha| &\rightarrow \infty \\ -1 &< \gamma_{1,2} < 1. \end{aligned} \right\} \quad (22a)$$

Nach der Lösung des homogenen Hilbert-Problems macht die Lösung des inhomogenen (16') keine Schwierigkeiten mehr. Schreibt man nämlich (16') mit Hilfe von (17) in der Gestalt

$$\frac{\Phi^+(\alpha)}{L^+(\alpha)} - \frac{\Phi^-(\alpha)}{L^-(\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{L^+(\alpha)} + \frac{g(\alpha)}{L^-(\alpha)}, \quad (23)$$

so ist dadurch für die stückweise holomorphe Funktion

$$\Omega(\alpha) = \begin{cases} \frac{\Phi^+(\alpha)}{L^+(\alpha)}, & \alpha \in S^+ \\ \frac{\Phi^-(\alpha)}{L^-(\alpha)}, & \alpha \in S^- \end{cases} \quad (24)$$

<sup>31)</sup> Vgl. Titchmarsh, l. c.

das Sprungwertproblem

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = \frac{f(x)}{L^+(x)} + \frac{g(x)}{L^-(x)} \quad (25)$$

gegeben. Dieses hat nach (1) die Lösung ( $x$  komplex)

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{f(x')}{L^+(x')} + \frac{g(x')}{L^-(x')} \right\} \frac{dx'}{x' - x} + C. \quad (26)$$

Damit ist auch die Lösung der Ausgangsgleichung (14') gefunden, wenn man (24) in (15) einsetzt:

$$\varphi(x) = -\frac{f(x)}{L(x)} + L^-(x) \Omega^+(x) = g(x) + L^-(x) \Omega^-(x). \quad (28)$$

Trägt man hier (26) ein, so ergibt sich die Lösung in den beiden Formen

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{f(x)}{L(x)} + \frac{L^-(x)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{f(x')}{L^+(x')} + \frac{g(x')}{L^-(x')} \right\} \frac{dx'}{x' - \alpha} \\ &= g(x) + \frac{L^-(x)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{f(x')}{L^+(x')} + \frac{g(x')}{L^-(x')} \right\} \frac{dx'}{x' - \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

wofür wir auch schreiben können

$$\varphi(x) = \frac{L^-(x)}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{L^+(x')} \frac{dx'}{x' - \alpha} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x')}{L^-(x')} \frac{dx'}{x' - \alpha} \right\}. \quad (29')$$

Dabei haben wir den Term

$$\varphi_0(x) = C L^-(x) \quad (30)$$

nicht mit angeschrieben; er ist offensichtlich die Lösung der homogenen Gl. (14), die stets hinzugefügt werden kann.

In der Tat wird beim Einsetzen von (30) in (14) der Integrand des ersten bzw. zweiten Integrals der Gl. (14) in  $S^+$  bzw.  $S^-$  holomorph. Schließt man den Integrationsweg über das Unendliche der oberen bzw. unteren Halbebene, so verschwinden die Integrale längs des geschlossenen Weges. Der Beitrag dieses Rückweges liefert keinen Beitrag, wenn  $L^+(x)$  bzw.  $L^-(x)$  im Unendlichen von  $S^+$  bzw.  $S^-$  beliebig schwach verschwindet (d. h. für  $\gamma_1 < 0$  und  $\gamma_2 < 0$ ). Wie wir sogleich sehen werden, ist jedoch (29) auch dann noch eine Lösung von (14), wenn  $L^+(x)$  und (oder)  $L^-(x)$  allenfalls schwächer als  $x^1$  im Unendlichen singular wird (d. h. für  $0 \leq \gamma_{1,2} < 1$ ). In diesem Fall ist  $C = 0$  zu setzen; die Lösung von (14) ist dann eindeutig.

Die Lösung (29) läßt sich durch Einsetzen in (14') leicht verifizieren. Aus der ersten bzw. zweiten Gl. (29) folgt mit (17)

$$\left. \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} [L(x') \varphi(x') + f(x')] \frac{dx'}{x' - \alpha} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \left\{ \frac{f(x'')}{L^+(x'')} + \frac{g(x'')}{L^-(x'')} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L^+(x') dx'}{(x' - \alpha)(x'' - \alpha')} \\ &\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x') - g(x')] \frac{dx'}{x' - \alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \{ \dots \} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L^-(x') dx'}{(x' - \alpha)(x'' - \alpha')}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Schließt man hier den Integrationsweg der inneren Integrale über das Unendliche von  $S^+$  bzw.  $S^-$ , so verschwinden sie, da  $L^+(\alpha)$  bzw.  $L^-(\alpha)$  in  $S^+$  bzw.  $S^-$  holomorph ist. Der Rückweg liefert aber wegen (22a) keinen Beitrag<sup>32)</sup>.

3. Lösung der Wiener-Hopfschen Gleichung. Diese hat die Form<sup>33)</sup>

$$a \varphi(x) - b \int_0^\infty \varphi(x') K(x-x') dx = f(x), \quad x > 0. \quad (32)$$

Mit

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}(\alpha) &= \int_{-\infty}^\infty K(x) e^{-i\alpha x} dx \rightarrow K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \bar{K}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \\ \text{und} \\ \varphi(\alpha) &= \int_0^\infty \varphi(x) e^{-i\alpha x} dx \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

nimmt (32) die Gestalt an

$$\left. \begin{aligned} a \varphi(x) - \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \bar{\varphi}(\alpha) \bar{K}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha &= f(x), \quad x > 0 \\ \int_{-\infty}^\infty \bar{\varphi}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha &= 0, \quad x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit  $e^{-i\alpha' x}$  und integriert über den entsprechenden  $x$ -Bereich, so folgt [vgl. (1.31'')]

$$\left. \begin{aligned} a \bar{\varphi}(\alpha) + \frac{b}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \bar{\varphi}(\alpha') \bar{K}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= \bar{f}(\alpha) \\ \int_{-\infty}^\infty \bar{\varphi}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

<sup>32)</sup> Ein anderer Weg, um (29') zu verifizieren, ist folgender: Mit Hilfe von (14) gilt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(\alpha')}{L^-(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ &+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty}^\infty d\alpha'' L(\alpha'') \varphi(\alpha'') \int_{-\infty}^\infty \frac{d\alpha'}{L^+(\alpha')(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')} \end{aligned} \right\} \quad (31')$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{g(\alpha')}{L^-(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(\alpha')}{L^-(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ &+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty}^\infty d\alpha'' \varphi(\alpha'') \int_{-\infty}^\infty \frac{d\alpha'}{L^-(\alpha')(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')} ; \end{aligned} \right\} \quad (31'')$$

die Doppelhakenintegrale verschwinden aber zufolge (22a). Durch Addition der beiden letzten Gleichungen ergibt sich rechts  $\varphi(\alpha)/L^-(\alpha)$  und damit gerade (29'). Wir weisen darauf hin, daß in (31) die Größen  $L^+(\alpha)$  bzw.  $L^-(\alpha)$  bei den Doppelhakenintegralen im Zähler stehen, in (31'), (31'') dagegen im Nenner. Damit die Integrale beide Male verschwinden, ist also gerade (22a) hinreichend.

<sup>33)</sup> Wiener und Hopf behandeln nur die homogene Gl. (32). Die im Text gegebene Lösung für eine beliebige Inhomogenität  $f(x)$  ist unseres Wissens in der Literatur bisher nicht zu finden.

mit

$$\bar{f}(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \quad (36)$$

also

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} = \int_0^{\infty} dx f(x) \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha' x}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = 0. \quad (37)$$

Aus der zweiten Gl. (35) folgt nun

$$\bar{\varphi}(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha}; \quad (38)$$

dies in (35) eingetragen gibt

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} L(\alpha') \bar{\varphi}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= \bar{f}(\alpha) \\ \oint_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (35')$$

mit

$$L(\alpha) = b \bar{K}(\alpha) - a. \quad (39)$$

Gl. (35') ist von der Form (14) und hat daher nach (29) die Lösung

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \frac{L^-(\alpha)}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} + C L^-(\alpha), \quad (40)$$

wobei wir die Lösung (30) der homogenen Gleichung hinzugefügt haben. Durch Fourier-Umkehrung ergibt sich damit die Lösung von (32), vgl. (7')

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{4\pi^2 i} \oint_{-\infty}^{\infty} d\alpha' \frac{\bar{f}(\alpha')}{L^+(\alpha')} \oint_{-\infty}^{\infty} L^-(\alpha) e^{i\alpha x} \frac{d\alpha}{\alpha' - \alpha} \\ &+ C' \int_{-\infty}^{\infty} L^-(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Die Lösung verschwindet für  $x < 0$ , da dann die  $\alpha$ -Integranden in der unteren Halbebene holomorph sind. Für  $f \equiv 0$  ergibt sich die bekannte Lösung der homogenen Wiener-Hopf-Gleichung.

4. Lösung der Hauptgleichung. Wir schreiben sie der Kürze halber mit gegenüber (13) abgeänderter Bezeichnungsweise

$$A(\alpha) \varphi(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\alpha') \varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = f(\alpha). \quad (42)$$

Aus (42) folgt mit (12)

$$\left. \begin{aligned} \oint_{-\infty}^{\infty} [A(\alpha') \varphi(\alpha') - f(\alpha')] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \\ A(\alpha) \varphi(\alpha) - f(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} [\cdot \cdot] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

oder

Setzt man die zweite Gl. (43) in (42) ein, so ergibt sich, daß (42) mit dem System

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\alpha') \varphi(\alpha') - f(\alpha')] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \{[A(\alpha') + B(\alpha')] \varphi(\alpha') - f(\alpha')\} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

äquivalent ist. Dieses ist aber ein System der Form (14) für die Unbekannte  $[A(\alpha) + B(\alpha)] \varphi(\alpha)$  mit

$$L(\alpha) = \frac{A(\alpha)}{A(\alpha) + B(\alpha)}. \quad (45)$$

Somit folgt aus (29') die Lösung von (42) in der Form

$$\varphi(\alpha) = \frac{L^+(\alpha) - L^-(\alpha)}{2\pi i B(\alpha)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{L^-(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \right\} \quad (46)$$

oder auch<sup>34)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \frac{f(\alpha)}{A(\alpha)} + \frac{L^+(\alpha) - L^-(\alpha)}{2\pi i B(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\alpha') f(\alpha')}{A(\alpha') L^-(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ &= \frac{f(\alpha)}{A(\alpha) + B(\alpha)} + \frac{L^+(\alpha) - L^-(\alpha)}{2\pi i B(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\alpha') f(\alpha')}{[A(\alpha') + B(\alpha')] L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (46')$$

Die Lösung der homogenen Gl. (42) erhält man aus (30) in der Gestalt

$$\varphi_0(\alpha) = C \frac{L^+(\alpha)}{A(\alpha)} = C \frac{L^-(\alpha)}{A(\alpha) + B(\alpha)} \quad (47)$$

oder mehr symmetrisch

$$\varphi_0(\alpha) = C \cdot \frac{L^-(\alpha) - L^+(\alpha)}{B(\alpha)}. \quad (47')$$

Durch Eintragen der Lösung (47) bzw. (47') in (42) ergibt sich links

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L^-(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L^+(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha'; \quad (48)$$

dies verschwindet nur dann (einzeln), wenn  $L^+(\alpha)$  bzw.  $L^-(\alpha)$  für  $|\alpha| \rightarrow \infty$  in  $S^+$  bzw.  $S^-$  verschwindet, also für  $\gamma_1 < 0$  und  $\gamma_2 < 0$  in (22a)<sup>35)</sup>. Anderer-

<sup>34)</sup> Es gilt

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{L^+(\alpha)} - \frac{1}{L^-(\alpha)} &= \frac{B(\alpha)}{[A(\alpha) + B(\alpha)] L^+(\alpha)} = \frac{B(\alpha)}{L^-(\alpha) A(\alpha)} \\ L^+(\alpha) - L^-(\alpha) &= -\frac{B(\alpha) L^-(\alpha)}{A(\alpha)} = -\frac{B(\alpha) L^-(\alpha)}{A(\alpha) + B(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (45')$$

<sup>35)</sup> Für  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  heben sich die beiden Terme in (48) nur dann gegenseitig fort, falls  $L^+ = -L^- = \text{const}$  für  $|\alpha| \rightarrow \infty$  in  $S^+$  bzw.  $S^-$ , vgl. (4).

seits folgt aus der zweiten Gl. (46')

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\alpha') \varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\alpha') f(\alpha')}{A(\alpha') + B(\alpha') \alpha' - \alpha} d\alpha' \\ + \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha'' \frac{B(\alpha'') f(\alpha'')}{[A(\alpha'') + B(\alpha'')] L^+(\alpha'')} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L^+(\alpha') - L^-(\alpha')}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')} d\alpha' \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Nun gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L^+(\alpha') - L^-(\alpha')}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')} d\alpha' = \frac{L^+(\alpha) - L^-(\alpha'')}{\alpha'' - \alpha} \quad (45')$$

bei Beachtung von (22a), wobei hier jedoch auch  $\gamma_{1,2} > 0$  zulässig ist. Mit (48') gibt (49)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\alpha') \varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = \frac{L^+(\alpha)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\alpha') f(\alpha')}{A(\alpha') L^-(\alpha') \alpha' - \alpha} d\alpha'; \quad (46')$$

setzt man dies und die erste Gl. (46') in (42) links ein, so ergibt sich mit (45') gerade der Wert  $f(\alpha)$ . Somit löst also (46) die Gl. (42) auch noch für den Fall  $0 \leq \gamma_{1,2} < 1$ , dann hat aber die homogene Gl. (42) keine Lösung ( $C = 0$ )<sup>36</sup>.

Betrachten wir als einfaches Beispiel  $A(\alpha) \equiv -\frac{1}{2}$ ,  $B(\alpha) \equiv 1$ , so lautet (42) [mit  $2f(\alpha) \rightarrow f(\alpha)$ ]

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = f(\alpha) \quad (50)$$

und (45) gibt  $L = -1$ . Wir können also  $L^+ = 1$ ,  $L^- = -1$  setzen und erhalten aus (46)

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha'. \quad (50')$$

Diese Lösung ist bereits in (12'') enthalten. Ferner hat die homogene Gl. (50) die Lösung  $\varphi_0 = C$ .

Wir betrachten nun noch das folgende spezielle System simultaner Hauptgleichungen

$$\left. \begin{aligned} L(\alpha) \varphi_1(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_2(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= f_1(\alpha) \\ \varphi_2(\alpha) - \frac{L(\alpha)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= f_2(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Auch dieses läßt sich auf Gleichungen vom Typus (14) zurückführen. Aus (51) folgt zunächst wegen (12)

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [L(\alpha') \varphi_1(\alpha') - f_1(\alpha')] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_2(\alpha') - f_2(\alpha')}{L(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

<sup>36</sup> Eine Ausnahme für  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  bildet der Fall, der in der Fußnote zu Gl. (48) erwähnt worden ist; s. das folgende Beispiel.

Damit können wir Gl. (51) nach dem Vorbild von (44) schreiben

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [L(\alpha') \varphi(\alpha') - f_1(\alpha')] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \varphi(\alpha') + \frac{f_2(\alpha')}{L(\alpha')} \right] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

mit

$$\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) - \frac{\varphi_2(\alpha)}{L(\alpha)}. \quad (54)$$

Für  $\varphi(\alpha)$  ergibt sich also wieder Gl. (14'), daher folgt nach (29')

$$\varphi(\alpha) = -\frac{L^-(\alpha)}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_2(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \right\} \quad (55)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} L(\alpha) \varphi(\alpha) &= f_1(\alpha) - \frac{L^+(\alpha)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ &= -f_2(\alpha) - \frac{L^+(\alpha)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (55')$$

mit

$$f(\alpha) = f_1(\alpha) + f_2(\alpha). \quad (56)$$

Mit Hilfe von (54) können wir weiter für die zweite Gl. (51) schreiben

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = \varphi(\alpha) + \frac{f_2(\alpha)}{L(\alpha)}; \quad (57)$$

setzen wir hier (55') ein und nehmen die erste Gl. (52) hinzu, so folgt

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= \frac{L^-(\alpha)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ \int_{-\infty}^{\infty} [L(\alpha') \varphi_1(\alpha') - f_1(\alpha')] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (58a)$$

Auf demselben Wege ergibt sich aus der zweiten Gl. (52), der ersten Gl. (51) sowie (54) und (55')

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\varphi_2(\alpha')}{L(\alpha')} - \frac{f_2(\alpha')}{L(\alpha')} \right] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= \frac{L^+(\alpha)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (58b)$$

Wir erhalten also wiederum Gleichungen von der Form (14); die Bedingungen (15) sind wegen (22a) erfüllt. Daher ergibt sich aus (58a, b) mit Hilfe von (29)

sinngemäß

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\alpha) &= \frac{f_1(\alpha)}{L(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i L^+(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha' \frac{L^-(\alpha')}{\alpha' - \alpha} \\ &\cdot \left\{ f_1(\alpha') + \frac{L^+(\alpha')}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha'')}{L^+(\alpha'') \alpha'' - \alpha'} d\alpha'' \right\} \end{aligned} \right\} \quad (59a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(\alpha) &= f_2(\alpha) + \frac{1}{2\pi i L^-(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha' \frac{L^-(\alpha')}{\alpha' - \alpha} \\ &\cdot \left\{ f_1(\alpha') + \frac{L^+(\alpha')}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha'')}{L^+(\alpha'') \alpha'' - \alpha'} d\alpha'' \right\} \end{aligned} \right\} \quad (59b)$$

oder kürzer

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\alpha) &= \frac{f_1(\alpha)}{L(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i L^+(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} [L^-(\alpha') g(\alpha') - L^+(\alpha') \varphi(\alpha')] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ \varphi_2(\alpha) &= f_2(\alpha) + \frac{1}{2\pi i L^-(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} [L^-(\alpha') g(\alpha') - L^+(\alpha') \varphi(\alpha')] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (59c)$$

mit

$$g(\alpha) = f_1(\alpha) - f_2(\alpha). \quad (60)$$

Um die Lösung (59) durch Einsetzen in (51) zu verifizieren, berechnen wir

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\alpha')}{L(\alpha') \alpha' - \alpha} d\alpha' \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha'' L^-(\alpha'') \{ \cdot \cdot \} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha'}{L^+(\alpha') (\alpha' - \alpha) (\alpha'' - \alpha')} \end{aligned} \right\} \quad (61a)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_2(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_2(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha'' L^-(\alpha'') \{ \cdot \cdot \} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha'}{L^-(\alpha') (\alpha' - \alpha) (\alpha'' - \alpha')} \end{aligned} \right\} \quad (61b)$$

Mit Hilfe von (22a) findet man (Residuensatz)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha'}{L^+(\alpha') (\alpha' - \alpha) (\alpha'' - \alpha')} &= \left\{ \frac{1}{L^+(\alpha)} - \frac{1}{L^+(\alpha'')} \right\} \frac{1}{\alpha'' - \alpha} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha'}{L^-(\alpha') (\alpha' - \alpha) (\alpha'' - \alpha')} &= - \left\{ \frac{1}{L^-(\alpha)} - \frac{1}{L^-(\alpha'')} \right\} \frac{1}{\alpha'' - \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Damit geht (61) über in

$$\left. \begin{aligned} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= \frac{1}{L^+(\alpha)} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{L^-(\alpha')}{\alpha' - \alpha} \{ \dots \} d\alpha' \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha'' \frac{f(\alpha'')}{L^+(\alpha'')} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{L^-(\alpha')}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')} d\alpha' \end{aligned} \right\} \quad (63a)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_2(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= -\frac{1}{L^-(\alpha)} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{L^-(\alpha')}{\alpha' - \alpha} \{ \dots \} d\alpha' \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha'' \frac{f(\alpha'')}{L^+(\alpha'')} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{L^+(\alpha')}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')} d\alpha' \end{aligned} \right\} \quad (63b)$$

Die Doppelhakenintegrale verschwinden aber jeweils zufolge (22a)<sup>37)</sup>. Setzt man also (59a) und (63b) links in die erste Gl. (51) ein, so heben sich die Integrale gegenseitig auf und es bleibt  $f_1(\alpha)$  stehen. Ebenso erkennt man, daß (59b) und (63a) die zweite Gl. (51) befriedigen.

Wendet man den gleichen Formalismus auf die homogene Gl. (51) an, so ergibt sich mit (30) zunächst formal

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^{(0)}(\alpha) &= \frac{C_1}{L^+(\alpha)} + \frac{C_2}{L^-(\alpha)} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{L^+(\alpha') L^-(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \\ \varphi_2^{(0)}(\alpha) &= \frac{C_1}{L^-(\alpha)} + \frac{C_2}{L^+(\alpha)} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{L^+(\alpha') L^-(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Durch Einsetzen von (64) in (51) erkennt man jedoch, daß für  $\gamma_1 > 0$  und  $\gamma_2 > 0$   $C_2 = 0$  zu setzen ist, während für  $\gamma_1 < 0$  und  $\gamma_2 < 0$   $C_1 = 0$  sein muß. Für  $\gamma_1 \geq 0$ ,  $\gamma_2 \leq 0$  (oder umgekehrt) hat also die homogene Gl. (51) keine Lösung ( $C_1 = C_2 = 0$ )<sup>38)</sup>.

5. Beispiele. a) Wir lösen nun die bei der Beugung an der Halbebene auftretende Gl. (1.31). Sie ist von der Form (14) mit

$$L(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}; \quad (65)$$

Die in (17) geforderte Faktorisierung läßt sich hier leicht angeben

$$L^+(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha}}, \quad L^-(\alpha) = \sqrt{1 - \alpha}. \quad (65')$$

<sup>37)</sup> Man beachte, daß bei den Doppelhakenintegralen in (61) bzw. (63)  $L^+(\alpha)$  und  $L^-(\alpha)$  einmal im Nenner, einmal im Zähler stehen. Um beide Male den Residuenkalkül anwenden zu können, muß also  $L^+(\alpha)$  und  $L^-(\alpha)$  für  $|\alpha| \rightarrow \infty$  gerade in der Form (22a) eingeschränkt werden.

<sup>38)</sup> Für  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  ist (64) jedoch dann eine Lösung der homogenen Gleichung mit  $2\pi i C_2 = \pm C_1$ , falls  $L^+ = \mp L^- = \text{const}$  für  $|\alpha| \rightarrow \infty$  in  $S^+$  bzw.  $S^-$ .

In (22a) ist also  $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $\gamma_2 = \frac{1}{2}$ ; die Lösung von (1.31) ist daher eindeutig<sup>39)</sup>. Aus (29') folgt sofort

$$\varphi(\alpha) = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\alpha'} d\alpha'}{(\alpha' - \alpha_0)(\alpha' - \alpha)} \quad (66)$$

oder (Residuenkalkül)

$$\varphi(\alpha) = -\frac{\sqrt{1-\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0}. \quad (66')$$

Setzt man diese Lösung in (1.9) bzw. (1.12) ein, so erhält man nach einigen Umformungen (s. weiter unten) die von Sommerfeld heuristisch gewonnene Lösung für die Beugung an der Halbebene<sup>40)</sup>.

b) Zur Beugung am Spalt übergehend bringen wir in Gl. (1.38a) das Glied mit  $\bar{\varphi}_2$  auf die rechte Seite und lösen dann die Gleichungen mit Hilfe von (29') nach  $\bar{\varphi}_1(\alpha)$  auf. Mit (65') und (66') folgt so

$$\frac{\bar{\varphi}_1(\alpha)}{\sigma(-\alpha)} = -\frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha' \frac{\sqrt{1+\alpha'}}{\alpha' - \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_2(\alpha'')}{\sqrt{1-\alpha''^2}} \frac{e^{i\pi\alpha''}}{\alpha'' - \alpha'} d\alpha'' \quad (67)$$

mit

$$\sigma(\alpha) = \sqrt{1+\alpha} e^{i\pi\alpha} (\sigma(0) = 1). \quad (68)$$

Nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge läßt sich das innere Integral ausführen. Wir können dann (67) zusammen mit der sich entsprechend aus (1.38b) ergebenden Gleichung in der Form schreiben

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{\varphi}_1(\alpha)}{\sigma(-\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_2(\alpha')}{\sigma(-\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= -\frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \\ \frac{\bar{\varphi}_2(\alpha)}{\sigma(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_1(\alpha')}{\sigma(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= \frac{\sigma(-\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Physikalisch betreffen die Gln. (69) die Fernfelder einer an der rechten bzw. linken Halbebene gebeugten ebenen Welle, wobei jedoch durch den Integralterm zum Ausdruck kommt, daß noch eine Wechselwirkung besteht, die durch die Strahlung der jeweils anderen Halbebene hervorgerufen wird. Nach demselben Verfahren ergibt sich aus (45a, b)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\chi_1(\alpha)}{\sigma(-\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\gamma}_1(-\alpha')}{\sigma(-\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= -\left\{ \frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} + \frac{\sigma(-\alpha_0)}{\alpha + \alpha_0} \right\} \\ \frac{\bar{\gamma}_2(\alpha)}{\sigma(-\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\gamma}_2(-\alpha')}{\sigma(-\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= -\left\{ \frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} - \frac{\sigma(-\alpha_0)}{\alpha + \alpha_0} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

<sup>39)</sup> Übrigens würde die hier auszuschließende Lösung (30), nämlich  $\varphi_0(\alpha) = \sqrt{1-\alpha}$  — in (1.9) eingesetzt —, zu Singularitäten an der Schirmkante führen, die nach der Kantenbedingung auszuschließen sind, vgl. H. Hönl u. A.-W. Maue, Z. Physik **132**, 569 (1952). Bei der Formulierung des Beugungsproblems mittels singularer Integralgleichungen erübrigt sich also eine Kantenbedingung. Implizite ist jedoch die Kantenbedingung in der Forderung der Existenz der Integrale unseres Formalismus enthalten.

<sup>40)</sup> Eine ausführliche Darstellung bei H. Hönl und K. Westpfahl, Planck-Festschrift (im Erscheinen). Die Lösung (66') hat bereits P. C. Clemmow (l. c.) als Lösung der dualen Integralgleichungen (1.30) gefunden.

Gl. (69) läßt sich nun mit Hilfe der Substitution

$$\frac{\bar{\varphi}_1(\alpha)}{\sigma(\alpha)} = -\hat{\varphi}_1(\alpha), \quad \frac{\bar{\varphi}_2(\alpha)}{\sigma(-\alpha)} = \hat{\varphi}_2(\alpha) \quad (71)$$

unmittelbar auf die Form (51) bringen:

$$\left. \begin{aligned} L(\alpha) \hat{\varphi}_1(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\varphi}_2(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= \frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \\ \frac{\hat{\varphi}_2(\alpha)}{L(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_1(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= \frac{\sigma(-\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \end{aligned} \right\} \quad (69')$$

mit

$$L(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha)}{\sigma(-\alpha)}. \quad (72)$$

Die Aufspaltung (17) von  $L(\alpha)$  in eine in  $S^+$  und eine in  $S^-$  holomorphe Funktion ist hier ebenfalls sofort durchführbar

$$L^+(\alpha) = \sigma(\alpha) = \sqrt{1 + \alpha} e^{i\epsilon\alpha}, \quad L^-(\alpha) = \sigma(-\alpha) = \sqrt{1 - \alpha} e^{-i\epsilon\alpha}. \quad (73)$$

Allerdings ist hier Gl. (22a) nicht erfüllt (vielmehr sind  $L^+$  und  $L^-$  für  $|\alpha| \rightarrow \infty$  wesentlich singular), daher ist die eingangs entwickelte Theorie nicht ohne weiteres anwendbar. Wir wollen uns im folgenden Paragraphen darauf beschränken, die Lösung durch schrittweise Approximation zu berechnen, die mit den entwickelten Hilfsmitteln auskommt. Anschließend soll auf die Schwierigkeiten, die der Lösung von (69) in geschlossener Form entgegenstehen, näher eingegangen werden. Die Überwindung dieser Schwierigkeiten muß einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Hier wollen wir aus (69) noch eine Integralgleichung für die Größe  $\bar{\varphi}(\alpha) = \bar{\varphi}_1(\alpha) + \bar{\varphi}_2(\alpha)$  ableiten. Zunächst folgt aus (69) mit (12)

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_1(\alpha')}{\sigma(-\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_2(\alpha')}{\sigma(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

wir können daher links in (69) den jeweils ersten Term wieder durch

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{\varphi}_1(\alpha)}{\sigma(-\alpha)} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_1(\alpha')}{\sigma(-\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ \frac{\bar{\varphi}_2(\alpha)}{\sigma(\alpha)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_2(\alpha')}{\sigma(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (74')$$

bzw.

ersetzen. Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\alpha')}{\sigma(-\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= \frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\alpha')}{\sigma(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= \frac{\sigma(-\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Diese Gleichungen für  $\bar{\varphi}(\alpha)$  sind wieder von der Form (14) mit  $L(\alpha)$  aus (72)<sup>41)</sup>.

Andererseits ergibt sich aus (69) und (74)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_1(\alpha')}{\sigma(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= -\frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{\sigma(\alpha)} + \frac{\sigma(-\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_1(\alpha')}{\sigma(-\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (76a)$$

sowie

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_2(\alpha')}{\sigma(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_2(\alpha')}{\sigma(-\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{\sigma(-\alpha)} + \frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \end{aligned} \right\} \quad (76b)$$

Diese Gleichungen haben ebenfalls die Form (14). Sie vermitteln die Beziehung zwischen  $\bar{\varphi}_1(\alpha)$  und  $\bar{\varphi}(\alpha)$  sowie  $\bar{\varphi}_2(\alpha)$  und  $\bar{\varphi}(\alpha)$ .

Da nun mit  $\bar{\varphi}(\alpha)$  über (1.9) der gesamte Feldverlauf bekannt ist, so müssen sich  $\bar{\varphi}_1(\alpha)$  und  $\bar{\varphi}_2(\alpha)$  auch direkt aus  $\bar{\varphi}(\alpha)$  bestimmen lassen: Zunächst ergibt sich für die Flächenströme (1.6) aus (1.9)

$$\varphi_{1,2}(x) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha) e^{i k \alpha x} d\alpha, \quad \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases} \quad (77)$$

also mit (1.34) und (1.32'')

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_1(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \frac{e^{i \varepsilon(\alpha' - \alpha)}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \\ \bar{\varphi}_2(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \frac{e^{-i \varepsilon(\alpha' - \alpha)}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

<sup>41)</sup> Gl. (75) können wir auch in der Gestalt

$$-\frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{\sigma(-\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{a}{\sigma(\alpha')} + \frac{1}{\sigma(-\alpha')} \right] \bar{\varphi}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} = \frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} + a \frac{\sigma(-\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \quad (75')$$

zusammenfassen [ $a$  beliebige Konstante  $\neq 0$ , vgl. (13')]. Es ist jedoch darauf hinzuweisen, daß  $\bar{\varphi}(\alpha)$  gleichzeitig mit (75) bzw. (75') auch der aus (74) folgenden homogenen Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha') \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = 0$$

genügen muß. Nur dann erhält man die Lösung von (1.36) bzw. (1.41).

Nun besagt die zweite Gl. (1.38a) bzw. die erste Gl. (1.38b), daß  $\bar{\varphi}_1(\alpha) e^{i\varepsilon\alpha}$  in  $S^-$  bzw.  $\bar{\varphi}_2(\alpha) e^{-i\varepsilon\alpha}$  in  $S^+$  holomorph ist; folglich gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \frac{1 - e^{\pm i\varepsilon(\alpha' - \alpha)}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' = 0. \quad (79)$$

Damit läßt sich (78) auch in der Form

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_1(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ \bar{\varphi}_2(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (78')$$

schreiben<sup>42)</sup>.

6. Verwandte Integralgleichungen. Wir betrachten die bei der Beugung am Spalt (bzw. Streifen) auftretende duale Integralgleichung (1.36) in der allgemeineren Form

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha) \varphi(\alpha) e^{i\varepsilon\alpha} d\alpha &= -f(x) \quad (|x| < \varepsilon) \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) e^{i\varepsilon\alpha} d\alpha &= g(x) \quad (|x| > \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

und zeigen, daß sie sich auf ein System singulärer Integralgleichungen der Form (42) zurückführen läßt. Zunächst folgt durch Multiplikation mit  $e^{-i\varepsilon\alpha'}$  und Integration über den entsprechenden  $x$ -Bereich

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha') \varphi(\alpha') \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= -\bar{f}(\alpha) \\ \varphi(\alpha) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha') \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= g(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (80')$$

mit

$$\bar{f}(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) e^{-i\varepsilon\alpha} d\alpha, \quad g(x) = \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right\} g(x) e^{-i\varepsilon\alpha} d\alpha. \quad (81)$$

Gl. (80) bzw. (80') tritt bei allen „Zweikantenproblemen“ auf. Die erste Gl. (80) zerlegen wir nun in die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha) \varphi_1(\alpha) e^{i\varepsilon\alpha} d\alpha &= -f_1(x) \quad (x < \varepsilon) \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha) \varphi_2(\alpha) e^{i\varepsilon\alpha} d\alpha &= -f_2(x) \quad (x > -\varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

<sup>42)</sup> Gl. (78') ergibt sich auch, wenn man (76a, b) mittels (29') formal nach  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  auflöst, obwohl hier (22a) nicht erfüllt ist. Löst man auch (69) mittels (29') formal nach  $\varphi$  auf, so folgt

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{2\pi i} \left\{ \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\alpha_0) d\alpha'}{\sigma(\alpha') (\alpha' - \alpha_0) (\alpha' - \alpha)} + \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(-\alpha_0) d\alpha'}{\sigma(-\alpha') (\alpha' - \alpha_0) (\alpha' - \alpha)} \right\}. \quad (79')$$

Dies läßt sich jedoch nicht als simultane Lösung der beiden Gln. (1.36) bzw. (1.41) verifizieren (die homogene Gleichung ist nicht erfüllt).

mit

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad (83)$$

und

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} f(x) & (|x| < \varepsilon) \\ 0 & (x < -\varepsilon) \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} f(x) & (|x| < \varepsilon) \\ 0 & (x > \varepsilon) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Die zweite Gl. (80) (getrennt für die beiden Bereiche  $x > \varepsilon$  und  $x < -\varepsilon$ ) zusammen mit den beiden Gl. (84) lassen sich nun durch Multiplikation mit  $e^{-i\alpha'x}$  und entsprechende  $x$ -Integration in die Form setzen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_1(\alpha') + \varphi_2(\alpha')] \frac{e^{i\varepsilon(\alpha' - \alpha)}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= -\bar{g}_1(\alpha) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha') \varphi_1(\alpha') \frac{e^{i\varepsilon(\alpha' - \alpha)}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= -\bar{f}_1(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (85a)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha') \bar{\varphi}_2(\alpha') \frac{e^{-i\varepsilon(\alpha' - \alpha)}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= \bar{f}_2(\alpha) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_2(\alpha') + \varphi_1(\alpha')] \frac{e^{-i\varepsilon(\alpha' - \alpha)}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= \bar{g}_2(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (85b)$$

mit

$$\bar{f}_1(x) = \bar{f}_2(x) = \frac{1}{2} \bar{f}(x) \quad (86)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_1(\alpha) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} g(x) e^{-i\alpha x} dx; & \bar{g}_2(\alpha) &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} g(x) e^{-i\alpha x} dx \\ g_1(x) + g_2(x) &= g(x). \end{aligned} \right\} \quad (86')$$

Wir müssen zeigen, daß (85a, b) mit (80') äquivalent ist. Zunächst folgt aus der ersten Gl. (85a) und der zweiten (85b) durch Subtraktion die zweite Gl. (80'). Ferner ist  $e^{i\varepsilon\alpha} \bar{f}_1(x)$  in  $S^+$  bzw.  $e^{-i\varepsilon\alpha} \bar{f}_2(x)$  in  $S^-$  holomorph (wie man leicht bestätigt), daher folgt aus der zweiten Gl. (85a) bzw. der ersten Gl. (85b)

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [L(\alpha') \varphi_1(\alpha') + f_1(\alpha')] \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} [L(\alpha') \varphi_2(\alpha') + f_2(\alpha')] \frac{e^{-i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Der Integrand dieser Integrale ist also in  $S^-$  bzw.  $S^+$  holomorph. Die eckige Klammer der ersten Gl. (87) multipliziert mit  $e^{-i\varepsilon\alpha'}$  (bzw. die der zweiten mit  $e^{i\varepsilon\alpha'}$ ), ist also erst recht holomorph in  $S^-$  (bzw.  $S^+$ ). Nun ist aber auch

$e^{-i\varepsilon\alpha}\bar{f}_1(\alpha)$  bzw.  $e^{i\varepsilon\alpha}\bar{f}_2(\alpha)$  in  $S^-$  bzw.  $S^+$  holomorph; daher gilt auch

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha') \varphi_1(\alpha') \frac{e^{-i\varepsilon(\alpha'-\alpha)}}{\alpha'-\alpha} d\alpha' = 0 \\ & \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha') \varphi_2(\alpha') \frac{e^{i\varepsilon(\alpha'-\alpha)}}{\alpha'-\alpha} d\alpha' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (87')$$

Addiert man nun die zweite Gl. (87') zur zweiten Gl. (85a), so folgt

$$L(\alpha) \varphi_1(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha') \varphi(\alpha') \frac{e^{-i\varepsilon(\alpha'-\alpha)}}{\alpha'-\alpha} d\alpha' = -\bar{f}_1(\alpha); \quad (88a)$$

ebenso folgt durch Addition der ersten Gl. (87') zur ersten Gl. (85b)

$$L(\alpha) \varphi_1(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha') \varphi(\alpha') \frac{e^{-i\varepsilon(\alpha'-\alpha)}}{\alpha'-\alpha} d\alpha' = \bar{f}_2(\alpha). \quad (88b)$$

Durch Subtraktion der beiden Gln. (88) folgt aber bei Beachtung von (86) gerade die erste Gl. (80').

Wir bringen nun in Gl. (85a) den Term mit  $\varphi_2$  auf die rechte Seite und lösen die Gleichung mit Hilfe von (29') nach  $\varphi_1$  auf. Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Ausführung des inneren Integrals mittels des Residuenkalküls — bei Beachtung von (22a) — ergibt sich so

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\alpha) = & \frac{e^{-i\varepsilon\alpha}}{2\pi i L^+(\alpha)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_2(\alpha') - \bar{g}_1(\alpha')] L^+(\alpha') \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\alpha'-\alpha} d\alpha' \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_1(\alpha') L^-(\alpha') \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\alpha'-\alpha} d\alpha' \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (89a)$$

Entsprechend ergibt sich aus Gl. (85b)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(\alpha) = & \frac{e^{i\varepsilon\alpha} L^-(\alpha)}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}_2(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{e^{-i\varepsilon\alpha'}}{\alpha'-\alpha} d\alpha' \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_1(\alpha') - \bar{g}_2(\alpha')] \frac{e^{-i\varepsilon\alpha'}}{L^-(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha'-\alpha} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (89b)$$

Da nun  $e^{i\varepsilon\alpha}\bar{g}_1(\alpha)$  in  $S^-$  bzw.  $e^{-i\varepsilon\alpha}\bar{g}_2(\alpha)$  in  $S^+$  holomorph ist, so können wir in (89a) bzw. (89b) die Größen  $\bar{g}_1(\alpha)$  bzw.  $\bar{g}_2(\alpha)$  jeweils durch  $\bar{g}(\alpha)$  ersetzen, ohne daß sich die Integrale ändern. Mit Hilfe von (86) sowie der Abkürzungen

$$A(\alpha) = e^{i\varepsilon\alpha} L^+(\alpha), \quad B(\alpha) = \frac{e^{-i\varepsilon\alpha}}{L^-(\alpha)}$$

ergibt sich so aus (89a, b)

$$\left. \begin{aligned} A(\alpha) \varphi_1(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha') \varphi_2(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha'-\alpha} &= F(\alpha) \\ B(\alpha) \varphi_2(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha') \varphi_1(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha'-\alpha} &= G(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(x')}{B(x')} \frac{dx'}{x' - x} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} A(x') \bar{g}(x') \frac{dx'}{x' - x} \\ G(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(x')}{A(x')} \frac{dx'}{x' - x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} B(x') \bar{g}(x') \frac{dx'}{x' - x} \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Gl. (90) ist ein System von Integralgleichungen des Typs (42), das im allgemeinen Fall die Form

$$\sum_{\mu=1}^n A_{\nu\mu}(x) \varphi_{\mu}(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\nu}(x') \varphi_{\nu}(x') \frac{dx'}{x' - x} = f_{\nu}(x) \quad (92)$$

( $\nu = 1, 2, \dots, n$ )

hat. In vorliegendem Fall geht (90) mittels der Substitution  $-B(x) \varphi_1(x) = \hat{\varphi}_1(x)$ ,  $B(x) \varphi_2(x) = \hat{\varphi}_2(x)$  wieder in die spezielle Gestalt (51) über. Der dabei auftretende Faktor von  $\hat{\varphi}_1(x)$ , nämlich:

$$\hat{L}(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = e^{2i\epsilon x} L^+(x) L^-(x) \quad (91')$$

ist zwar sofort in der Form

$$\hat{L}^+(x) = e^{i\epsilon x} L^+(x), \quad \hat{L}^-(x) = \frac{e^{-i\epsilon x}}{L^-(x)} \quad (91'')$$

faktorisierbar, jedoch ist hier (22a) wieder nicht erfüllt. Wir gehen auf diese Schwierigkeit weiter unten ein.

Behandelt man Gl. (1.54') für das  $N$ -Streifengitter nach derselben Methode (indem man die rechte Seite dieser Gleichung als Inhomogenität betrachtet), so ergibt sich ein System von  $2N$  Gleichungen vom Typus (92). Allgemein läßt sich jedes  $n$ -Kantenproblem auf ein System von  $n$ -Gleichungen der Gestalt (92) zurückführen.

Zum Abschluß betrachten wir noch das System

$$\left. \begin{aligned} a_1 \varphi_1(x) - b_1 \int_{\epsilon}^{\infty} [\varphi_1(x') K_1(x - x') + \varphi_2(-x') K_1(x + x')] dx' &= f_1(x) \\ &\quad (x > \epsilon) \\ a_2 \varphi_2(x) - b_2 \int_{-\infty}^{-\epsilon} [\varphi_2(x') K_2(x - x') + \varphi_1(-x') K_2(x + x')] dx' &= f_2(x) \\ &\quad (x < -\epsilon), \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

das sich ebenfalls auf (92) zurückführen läßt. Mit

$$\bar{K}_{1,2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{1,2}(x) e^{-i\alpha x} dx \rightarrow K_{1,2}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_{1,2}(x) e^{i\alpha x} dx \quad (94)$$

und

$$\varphi_1(x) = \int_{\epsilon}^{\infty} \varphi_1(x) e^{-i\alpha x} dx, \quad \bar{\varphi}_2(x) = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \varphi_2(x) e^{-i\alpha x} dx \quad (95)$$

geht (93) über in

$$\left. \begin{aligned} a_1 \varphi_1(x) - \frac{b_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_1(\alpha) \bar{\varphi}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha &= f_1(x) \quad (x > \varepsilon) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_1(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha &= 0 \quad (x < \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (96a)$$

und

$$\left. \begin{aligned} a_2 \varphi_2(x) - \frac{b_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_2(\alpha) \bar{\varphi}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha &= f_2(x) \quad (x < -\varepsilon) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_2(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha &= 0 \quad (x > -\varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (96b)$$

mit

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \bar{\varphi}_1(\alpha) + \bar{\varphi}_2(\alpha). \quad (97)$$

Multiplizieren wir die Gl. (97) mit  $e^{-i\alpha x}$  und integrieren sie über den entsprechenden  $x$ -Bereich, so folgt

$$\left. \begin{aligned} a_1 e^{i\varepsilon\alpha} \bar{\varphi}_1(\alpha) + \frac{b_1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_1(\alpha') \bar{\varphi}(\alpha') \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= e^{i\varepsilon\alpha} \bar{f}_1(\alpha) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_1(\alpha') \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (96'a)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_2(\alpha') \frac{e^{-i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 0 \\ a_2 e^{-i\varepsilon\alpha} \bar{\varphi}_2(\alpha) - \frac{b_2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_2(\alpha') \bar{\varphi}(\alpha') \frac{e^{-i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= e^{-i\varepsilon\alpha} \bar{f}_2(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (96'b)$$

mit

$$\bar{f}_1(\alpha) = \int_{\varepsilon}^{\infty} \bar{f}_1(x) e^{-i\alpha x} dx, \quad \bar{f}_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \bar{f}_2(x) e^{-i\alpha x} dx. \quad (97')$$

Da nun  $e^{i\varepsilon\alpha} \bar{\varphi}_1(\alpha)$  in  $S^-$ ,  $e^{-i\varepsilon\alpha} \bar{\varphi}_2(\alpha)$  in  $S^+$  holomorph ist, so können wir (96'a, b) in die Form bringen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [L_1(\alpha') \bar{\varphi}_1(\alpha') + b_1 \bar{K}_1(\alpha') \bar{\varphi}_2(\alpha')] \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= e^{i\varepsilon\alpha} \bar{f}_1(\alpha) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_1(\alpha') \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (96''a)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_2(\alpha') \frac{e^{-i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [L_2(\alpha') \bar{\varphi}_2(\alpha') - b_2 \bar{K}_1(\alpha')] \frac{e^{-i\varepsilon\alpha'}}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= e^{-i\varepsilon\alpha} \bar{f}_2(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (96''b)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} L_1(x) &= b_1 \bar{K}_1(x) - a_1 \\ L_2(x) &= -b_2 \bar{K}_2(x) + a_2. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Wir lösen nun (96''a) mit Hilfe von (29') nach  $\bar{\varphi}_1(x)$  und (96''b) nach  $\bar{\varphi}_2(x)$  auf und erhalten nach Ausführung einer Integration bei Beachtung von (22a):

$$\left. \begin{aligned} A_1(x) \bar{\varphi}_1(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} B_1(x') \bar{\varphi}_2(x') \frac{dx'}{x' - x} &= g_1(x) \\ A_2(x) \bar{\varphi}_2(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} B_2(x') \bar{\varphi}_1(x') \frac{dx'}{x' - x} &= g_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

mit

$$A_1(x) = \frac{e^{i\epsilon x}}{L_1^+(x)}, \quad B_1(x) = b_1 \frac{e^{i\epsilon x} \bar{K}_1(x)}{L_1^+(x)} \quad (100a)$$

$$A_2(x) = e^{-i\epsilon x} L_2^+(x), \quad B_2(x) = b_2 e^{-i\epsilon x} \bar{K}_2(x) L_2^-(x) \quad (100b)$$

und

$$\left. \begin{aligned} g_1(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\epsilon x'}}{L_1^+(x')} \bar{f}_1(x') \frac{dx'}{x' - x} \\ g_2(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\epsilon x'} L_2^-(x') \frac{dx'}{x' - x} \end{aligned} \right\} \quad (100')$$

7. Eine eigentümliche Schwierigkeit. Der Faktor  $e^{2i\epsilon x}$  in (91') ist für Zweikantenprobleme typisch. Er macht zunächst eine direkte Anwendung der für die Lösung von (51) dargestellten Methode unmöglich. Diese Schwierigkeit rührt daher, daß dieser Faktor im unendlich fernen Punkt wesentlich singulär wird. Die hier vorliegenden Verhältnisse lassen sich besser übersehen, wenn man durch eine rationale Substitution den unendlich fernen Punkt in einen im Endlichen gelegenen Punkt transformiert. Zu diesem Zweck bilden wir mittels der Substitution

$$s = \frac{\alpha - i}{-i\alpha + 1} \rightarrow \alpha = \frac{s + i}{i s + 1} \quad (102)$$

die obere  $\alpha$ -Halbebene konform auf das Innere des Einheitskreises der  $s$ -Ebene ab. Der unendlich ferne Punkt der  $\alpha$ -Ebene geht damit in den Punkt  $s = i$  über. Wir wollen jetzt das Innere bzw. Äußere dieses Einheitskreises mit  $S^+$  bzw.  $S^-$  bezeichnen.

Wir betrachten das Beispiel Gl. (69) mit beliebigen rechten Seiten  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$ . Mit (102) ergibt sich aus (68)

$$\left. \begin{aligned} \sigma(x) &= \sqrt{1+i} e^s \sqrt{\frac{1+s}{is+1}} e^{\frac{-2\epsilon}{is+1}} \\ \sigma(-x) &= \sqrt{1-i} e^{-s} \sqrt{\frac{1-s}{is+1}} e^{\frac{2\epsilon}{is+1}} \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

(Der Zweig der Wurzeln ist so zu wählen, daß für  $s = -i$  die rechten Seiten von (103) den Wert 1 liefern.) Setzen wir ferner

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_1\left(\frac{s+i}{is+1}\right) &= \varphi_1(s), & \bar{\varphi}_2\left(\frac{s+i}{is+1}\right) &= \varphi_2(s) \\ f_1\left(\frac{s+i}{is+1}\right) &= (is+1) g_1(s), & f_2\left(\frac{s+i}{is+1}\right) &= (is+1) g_2(s), \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

so folgt mit

$$\frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} = \frac{is+1}{is'+1} \frac{ds'}{s' - s} \rightarrow \frac{ds'}{s' - s} = \frac{-i\alpha + 1}{-i\alpha' + 1} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \quad (105)$$

aus (69)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi_1(s)}{\xi^-(s)} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s'|=1} \frac{\varphi_2(s')}{\xi^-(s')} \frac{ds'}{s' - s} &= g_1(s) \\ \frac{\varphi_2(s)}{\xi^+(s)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s'|=1} \frac{\varphi_1(s')}{\xi^+(s')} \frac{ds'}{s' - s} &= g_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \xi^+(s) &= \sqrt{1+i} e^s \sqrt{(1+s)(is+1)} e^{\frac{-2\varepsilon}{is+1}} \\ \xi^-(s) &= \sqrt{1-i} e^{-s} \sqrt{(1-s)(is+1)} e^{\frac{2\varepsilon}{is+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Der Integrationsweg in (69) geht in den Einheitskreis  $|s'| = 1$  über; die Haken  $\cup$  bzw.  $\cap$  an den Integralen in (106) bedeuten jetzt, daß dem Pol  $s' = s$

durch einen unendlich kleinen Halbkreis in das Innere ( $S^+$ ) bzw. Äußere ( $S^-$ ) von  $|s'| = 1$  auszuweichen ist. Abb. 7 zeigt die zu  $\xi^+(s)$  bzw.  $\xi^-(s)$  gehörigen Riemannschen Flächen mit den entsprechenden Verzweigungsschnitten.

Außerdem haben wir angedeutet, wie der Integrationsweg bei den Integralen zu führen ist, die  $\xi^+(s)$  bzw.  $\xi^-(s)$  im Integranden enthalten.  $\xi^+(s)$  bzw.  $\xi^-(s)$  sind in  $S^+$  bzw.  $S^-$  holomorph; die Punkte  $-1, i$  bzw.  $1, i$  sind



Abb. 7. Integrationsweg in der  $s$ -Ebene für Integrale, die a)  $\xi^+(s)$  bzw. b)  $\xi^-(s)$ , Gl. (107), im Integranden enthalten

Verzweigungspunkte. Außerdem ist  $s = i$  ein wesentlich singulärer Punkt zufolge des Faktors

$$e^{\frac{2\varepsilon}{is+1}} = 1 \mp \frac{2\varepsilon}{is+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\varepsilon}{is+1} \right)^2 + \dots \quad (108)$$

Die Schwierigkeit besteht nun darin, daß dieser Punkt auf dem Integrationsweg von (106) liegt. Existieren nämlich die Integrale in (69) etwa als Haupt-

werte  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^R \dots$ , so können wir bei den Integralen in (106) die Stelle  $s = i$

nicht durch kleine Halbkreise in  $S^-$  bzw.  $S^+$  (in Abb. 7 gestrichelt) umlaufen, da die Integralgleichungen (106) dadurch wesentlich abgeändert werden<sup>43)</sup>.

Um die Singularität fortzuschaffen schlagen wir folgenden Weg ein. In die  $\alpha$ -Ebene zurückkehrend schreiben wir Gl. (69) mit (68) in der Form

$$\left. \begin{aligned} \check{\varphi}_1(x) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1+\alpha'}{1-\alpha'}} e^{2i\varepsilon\alpha'} \check{\varphi}_2(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= f_1(x) \\ \check{\varphi}_2(x) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1-\alpha'}{1+\alpha'}} e^{-2i\varepsilon\alpha'} \check{\varphi}_1(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= f_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \check{\varphi}_1(x) &= \frac{\bar{\varphi}_1(x)}{\sigma(-x)}, & \check{\varphi}_2(x) &= \frac{\bar{\varphi}_2(x)}{\sigma(x)} \\ f_1(x) &= -\frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}, & f_2(x) &= \frac{\sigma(-\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Die Faktoren von  $\check{\varphi}_1$  und  $\check{\varphi}_2$  unter dem Integral zerlegen wir nun in zwei Terme, von denen der eine in  $S^+$ , der andere in  $S^-$  holomorph ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{2i\varepsilon\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} &= \frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{-\infty}^{\infty} - \oint_{-\infty}^{\infty} \right) \frac{e^{2i\varepsilon\alpha'}}{\sqrt{1-\alpha'}} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ \frac{e^{-2i\varepsilon\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}} &= \frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{-\infty}^{\infty} - \oint_{-\infty}^{\infty} \right) \frac{e^{-2i\varepsilon\alpha'}}{\sqrt{1+\alpha'}} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Da nun nach (74)  $\check{\varphi}_1(x)$  in  $S^-$  bzw.  $\check{\varphi}_2(x)$  in  $S^+$  holomorph ist, so können wir beim Einsetzen von (112) in (110) den in  $S^+$  bzw.  $S^-$  holomorphen Term der ersten bzw. zweiten Gl. (112) fortlassen und erhalten

$$\left. \begin{aligned} \check{\varphi}_1(x) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} B(\alpha') \check{\varphi}_2(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= f_1(x) \\ \check{\varphi}_2(x) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} B(-\alpha') \check{\varphi}_1(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= f_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (110')$$

<sup>43)</sup> Die so abgeänderten Integralgleichungen (106) (gestrichelter Umlauf um  $s = i$  in Abb. 7) lassen sich übrigens leicht lösen. Man erhält ([entsprechend 59c])

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(s) &= \xi^-(s) g_1(s) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s'|=1} [\xi^-(s') g_1(s') + \xi^+(s') g_2(s') - \psi(s')] \frac{ds'}{s' - s} \\ \varphi_2(s) &= \xi^+(s) g_2(s) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s'|=1} [\xi^-(s') g_1(s') + \xi^+(s') g_2(s') - \psi(s')] \frac{ds'}{s' - s} \\ \text{mit} \\ \varphi(s) &= -\frac{\xi^+(s) \xi^-(s)}{2\pi i} \left\{ \oint_{|s'|=1} \frac{g_1(s')}{\xi^+(s') s' - s} ds' - \oint_{|s'|=1} \frac{g_2(s')}{\xi^-(s') s' - s} ds' \right\} = \varphi_1(s) + \varphi_2(s). \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Man bestätigt dies durch Einsetzen der Lösung (109) in (106) bei Benutzung des in Abb. 7 gestrichelt ergänzten Integrationsweges (Residuenkalkül). Es ist indessen nicht leicht zu erkennen, in welchem Zusammenhang die Lösung (109) mit der Lösung der Integralgleichung (106) in ihrem ursprünglichen Sinn (ohne die gestrichelten Ausweichmanöver) steht.

mit

$$B(\alpha) = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\epsilon\alpha'}}{\sqrt{1-\alpha'}} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha}. \quad (113)$$

Wie wir unten zeigen werden, hat nun die Größe  $B(\alpha)$  das in (22a) geforderte algebraische Verhalten für  $|\alpha| \rightarrow \infty$ . Allerdings ist das System (110') nicht mehr von der speziellen Gestalt (51), sondern von der allgemeineren (92). Hier wollen wir noch eine einfache Umformung vornehmen: Vertauscht man in der zweiten Gl. (110')  $\alpha$  mit  $-\alpha$  sowie  $\alpha'$  mit  $-\alpha'$  und addiert (bzw. subtrahiert) die so entstehende Gleichung zu (bzw. von) der ersten Gl. (110'), so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\varphi}(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} B(\alpha') \widehat{\varphi}(-\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= f_1(\alpha) + f_2(-\alpha) \\ \text{bzw.} \\ \check{\varphi}(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} B(\alpha') \check{\varphi}(-\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= f_1(\alpha) - f_2(-\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\varphi}(\alpha) &= \check{\varphi}_1(\alpha) + \check{\varphi}_2(-\alpha) \\ \check{\varphi}(\alpha) &= \check{\varphi}_1(\alpha) - \check{\varphi}_2(-\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Man erhält also im wesentlichen jeweils dieselbe singuläre Integralgleichung für  $\widehat{\varphi}_1$  und  $\check{\varphi}_2$ , die sich jedoch von (42) in charakteristischer Weise unterscheidet.

Zur Untersuchung der Größe  $B(\alpha)$  in (113) betrachten wir das Integral

$$\hat{B}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\epsilon(\alpha' - \alpha)}}{\sqrt{1-\alpha'}} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\epsilon(\gamma' - \gamma)}}{\sqrt{\gamma'}(\gamma' - \gamma)} d\gamma', \quad (116)$$

wobei wir rechts die Substitution  $1 - \alpha = \gamma$ ,  $1 - \alpha' = \gamma'$  vorgenommen haben. Zunächst läßt sich  $B(\alpha)$  für  $\epsilon = 0$  mittels Residuenkalkül berechnen:

$$B_{\epsilon=0}(\alpha) = -\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}. \quad (116')$$

Jetzt differenzieren wir (116) nach  $\epsilon$ :

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial \epsilon} = \frac{e^{2i\epsilon\gamma}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\epsilon\gamma'}}{\sqrt{\gamma'}} d\gamma' = \frac{2}{\pi} e^{2i\epsilon\gamma} \int_0^{-i\infty} \frac{e^{-2i\epsilon\gamma'}}{\sqrt{\gamma'}} d\gamma', \quad (117)$$

dabei haben wir rechts den Integrationsweg so deformiert, daß er mit den beiden Ufern des Verzweigungsschnittes von  $\sqrt{\gamma'}$  zusammenfällt. Mit der Substitution  $2\gamma'\epsilon = \sigma^2$ ,  $d\gamma' = \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} d\sigma$  geht (117) über in<sup>44)</sup>

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial \epsilon} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} e^{2i\epsilon\gamma} \int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi\epsilon}} e^{i\left(2\epsilon\gamma - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (117')$$

<sup>44)</sup> Wegen  $\int_0^{\infty} e^{\pm i\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ . (117'')

Damit erhält man für  $B(\alpha) = e^{2i\varepsilon\alpha} \sqrt{1+\alpha} \hat{B}(\alpha)$  die Darstellung

$$B(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\left(2\varepsilon\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{1+\alpha} \int_0^\varepsilon e^{2ix(1-\alpha)} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad (118)$$

Dabei haben wir die untere Grenze des Integrals so gewählt, daß für  $\varepsilon = 0$  der Wert (116') resultiert. Substituiert man nämlich noch  $2x\gamma = \sigma^2$ ,  $dx = \sqrt{\frac{2x}{\gamma}} d\sigma$ , so folgt für  $B(\alpha)$  das Fresnelsche Integral

$$B(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{i\left(2\varepsilon\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \int_0^{\sqrt{2\varepsilon(1-\alpha)}} e^{i\sigma^2} d\sigma \quad (118')$$

und dies geht für  $\varepsilon = 0$  mit (117'') in (116') über. Für  $|\alpha| \gg 1$  (oder  $\varepsilon \gg 1$ ,  $\alpha \neq 1$ ) folgt nun aus (118) durch partielle Integration<sup>45)</sup>

$$B(\alpha) \rightarrow -\frac{e^{i\left(2\varepsilon\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \frac{\sqrt{1+\alpha}}{1-\alpha} \left(1 + \frac{1}{4i\varepsilon} \frac{1}{1-\alpha} + \dots\right) \quad (119)$$

(für  $|\alpha| \gg 1$  und  $\alpha \in S^-$ )<sup>46)</sup>.

$B(\alpha)$  zeigt also das gewünschte Verhalten

$$B(\alpha) = O(\alpha^{-1}) \quad \text{für} \quad |\alpha| \rightarrow \infty.$$

### § 3. Zur Beugung am Spalt

1. Schwarzschildisches Iterationsverfahren. Zur schrittweisen Approximation der Lösung von (2.69) liegt es nahe, die rechten Seiten dieser Gleichungen als nullte Näherungen zu betrachten und dann durch Einsetzen in die Integrale sukzessive höhere Näherungen zu berechnen (Neumannsche Reihe). Wir schreiben zu dem Zweck (2.69) mit Hilfe von (1.40) in der Gestalt

$$\frac{\varphi_1(\alpha_0, \alpha)}{\sigma(-\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(-\alpha_0, -\alpha')}{\sigma(-\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} = -\frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \quad (1)$$

und berechnen

$$\bar{\varphi}(\alpha_0, \alpha) = \bar{\varphi}_1(\alpha_0, \alpha) + \bar{\varphi}_1(-\alpha_0, -\alpha) \quad (2)$$

durch Iteration in der Form

$$\bar{\varphi}(\alpha_0, \alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\varphi}^{(\nu)}(\alpha_0, \alpha) \quad (3)$$

mit

$$\bar{\varphi}_1^{(0)}(\alpha_0, \alpha) = -\frac{\sigma(\alpha_0) \sigma(-\alpha)}{\alpha - \alpha_0} \quad (4)$$

$$\bar{\varphi}_1^{(\nu)}(\alpha_0, \alpha) = \frac{\sigma(-\alpha)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(\nu-1)}(-\alpha_0, -\alpha')}{\sigma(-\alpha')(\alpha' - \alpha)} d\alpha', \quad \nu > 0. \quad (5)$$

<sup>45)</sup> Da  $\hat{B}(\alpha)$  in  $S^-$  holomorph ist, ist der Pol  $\alpha = 1$  in (119) zu  $S^+$  zu rechnen.

<sup>46)</sup> Vgl. W. Magnus u. F. Oberhettinger, Formeln und Sätze ..., 2. Aufl., Berlin 1948, S. 126.

## Die nullte Näherung

$$\varphi^{(0)}(\alpha_0, \alpha) = -\frac{\sigma(\alpha_0) \sigma(-\alpha)}{\alpha - \alpha_0} + \frac{\sigma(-\alpha_0) \sigma(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} \quad (4')$$

ist nichts anderes als die Überlagerung der Fernfeldamplituden der an den beiden Halbebenen gebeugten ebenen Welle ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung. In dieser Näherung fließen auf den beiden Spaltbacken die Flächenströme  $\varphi_1^{(0)}(x)$  und  $\varphi_2^{(0)}(x)$ , deren Strahlungsfelder nun an der jeweils anderen Halbebene gebeugt werden. Dies wird durch die erste Näherung (5) berücksichtigt und so fort. Die ersten Schritte dieses Iterationsverfahrens werden also dann eine brauchbare Näherung liefern, wenn die Wechselwirkung der Spaltbacken klein ist. Mit anderen Worten, wenn die Spaltbreite sehr groß gegen die Wellenlänge ist („breiter“ Spalt,  $\varepsilon \gg 1$ ).

Das Verfahren geht im Prinzip auf K. Schwarzschild<sup>47)</sup> zurück, der die Greensche Funktion der Sommerfeldschen Halbebene zur Iteration verwendete. Schwarzschild konnte zeigen, daß das Verfahren für alle  $\varepsilon$  konvergiert, so daß wir diese Konvergenz auch für (3)–(5) in Anspruch nehmen können. Wir interessieren uns hier jedoch nur für die für  $\varepsilon \gg 1$  gültige asymptotische Entwicklung der Lösung. Demgemäß berechnen wir  $\varphi_1^{(1)}$ , indem wir (4) in (5) einsetzen

$$\bar{\varphi}_1^{(1)}(\alpha_0, \alpha) = \frac{\sigma(-\alpha_0) \sigma(-\alpha)}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\alpha') d\alpha'}{\sigma(-\alpha') (\alpha' - \alpha_0) (\alpha' - \alpha)} \quad (6)$$

und das Integral für  $\varepsilon \gg 1$  asymptotisch auswerten. Mit (2.68) und (2.9) folgt für dieses Integral

$$A(\alpha_0, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \alpha' e^{2i\varepsilon\alpha'}} d\alpha'}{\sqrt{1 - \alpha'} (\alpha' - \alpha_0) (\alpha' - \alpha)} = \frac{A(\alpha) - A(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \quad (7)$$

mit

$$A(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1 + \alpha' e^{2i\varepsilon\alpha'}}{1 - \alpha'}} d\alpha' = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} (1 + \alpha') \frac{e^{2i\varepsilon\alpha'}}{\sqrt{1 - \alpha'^2}} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \quad (8)$$

oder

$$A(\alpha) = \left[ 1 + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right] C(\alpha) \quad (8')$$

mit

$$C(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\varepsilon\alpha'}}{\sqrt{1 - \alpha'^2}} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \quad (9)$$

Zur Berechnung von  $C(\alpha)$  verwenden wir (1.8) in der Form

$$e^{-i\alpha x} H_0(|x|) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\alpha' - \alpha)x}}{\sqrt{1 - \alpha'^2}} d\alpha' \quad (10)$$

<sup>47)</sup> K. Schwarzschild, Math. Ann. 55, 177–247 (1902). — Siehe auch E. N. Fox, Phil. Trans. (A) 241, 71 (1948); 242, 1 (1949). — Den breiten Spalt behandeln ferner S. N. Karp u. A. Russek, New York Research Report EM-75 (1955) sowie I. B. Keller, ebenda Rep. EM-92 (1956) nach heuristischen aber wirkungsvollen Methoden. *Anmerkung bei der Korrektur:* Eine systematische Behandlung des breiten Spaltes, die von der im Text gegebenen abweicht, jedoch zum gleichen Ergebnis führt, findet sich bei Noble l. c.

und integrieren diesen Ausdruck nach  $x$  für  $2\varepsilon \leq x < \infty$

$$\int_{2\varepsilon}^{\infty} e^{-i\alpha x} H_0^1(x) dx = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\varepsilon(\alpha' - \alpha)}}{\sqrt{1 - \alpha'^2}} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha}. \quad (10')$$

Damit geht (9) über in

$$C(\alpha) = -\frac{e^{2i\varepsilon\alpha}}{2} \int_{2\varepsilon}^{\infty} e^{-i\alpha x} H_0^1(x) dx. \quad (9')^{48}$$

Für  $\varepsilon \gg 1$  können wir hier die Hankelsche Näherung

$$H_0^1(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} (1 + \dots), \quad x \gg 1 \quad (11)$$

verwenden und erhalten so durch partielle Integration

$$C(\alpha) \rightarrow -\frac{e^{i\left(2\varepsilon\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{2\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{i(1-\alpha)x}}{\sqrt{x}} dx \rightarrow -\frac{e^{i\left(2\varepsilon + \frac{\pi}{4}\right)}}{2\sqrt{\pi\varepsilon(1-\alpha)}} (1 + \dots), \quad (12)$$

wobei durch ... eine asymptotische Reihe nach fallenden Potenzen von  $\varepsilon$ , beginnend mit  $\varepsilon^{-1}$ , angedeutet sei (deren Koeffizienten von  $\alpha$  abhängen, s. unten). Setzt man (12) in (8') ein, so folgt

$$A(\alpha) \rightarrow -\frac{e^{i\left(2\varepsilon + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi\varepsilon(1-\alpha)}} (1 + \dots), \quad (12')$$

und damit aus (7)

$$A(\alpha_0, \alpha) \rightarrow -\frac{e^{i\left(2\varepsilon + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi\varepsilon(1-\alpha)(1-\alpha_0)}} (1 + \dots). \quad (13)$$

Damit ergibt sich  $\bar{\varphi}_1^{(1)}$  aus (6) asymptotisch

$$\bar{\varphi}_1^{(1)}(\alpha_0, \alpha) \rightarrow -\frac{e^{i\left(2\varepsilon + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \frac{\sigma(-\alpha_0)\sigma(-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\alpha_0)} (1 + \dots) \quad (14)$$

und aus (2)

$$\bar{\varphi}^{(1)}(\alpha_0, \alpha) \rightarrow -\frac{e^{i\left(2\varepsilon + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \left\{ \frac{\sigma(-\alpha_0)\sigma(-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\alpha_0)} + \frac{\sigma(\alpha_0)\sigma(\alpha)}{(1+\alpha)(1+\alpha_0)} \right\} (1 + \dots). \quad (15)$$

<sup>48)</sup> Mit (9') folgt aus (8')

$$A(\alpha) = (1 + \alpha) C(\alpha) + \frac{1}{2i} H_0^1(2\varepsilon) \quad (8'')$$

und damit aus (7)

$$A(\alpha_0, \alpha) = \frac{1}{\alpha - \alpha_0} [(1 + \alpha) C(\alpha) - (1 + \alpha_0) C(\alpha_0)]. \quad (7')$$

2. Asymptotische Lösung. Gl. (4) und der in (14) angeschriebene Term sind die beiden ersten Glieder einer asymptotischen Reihe für die strenge Lösung von (1) (als Funktion von  $\varepsilon$  betrachtet, d. h. die höheren Glieder sind fallende semikonvergente Potenzreihen in  $\varepsilon$ ). Im Gegensatz dazu ist die vom Schwarzschild'schen Verfahren gelieferte Reihe (3) für alle  $\varepsilon$  konvergent (jedoch für die numerische Auswertung im allgemeinen wegen ihrer schwachen Konvergenz ungeeignet). Aus (3) können zwar auch die weiteren Glieder der asymptotischen Reihe gewonnen werden, aber dieser Weg ist mühsam. Wir wollen daher ein Verfahren angeben, mit dem man diese Glieder in einem Schritt leicht berechnen kann.

Zu diesem Zweck gehen wir auf Gl. (1.33') zurück, die wir auf die Form (1.21) bringen wollen. Wir multiplizieren daher (1.33') mit  $e^{-ik\alpha x}$  und integrieren nach  $x$  über  $a \leq x < \infty$ . Mit (1.42) ergibt sich so

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_1(\alpha') K_+(\alpha, \alpha') d\alpha' &= \frac{e^{-i\varepsilon(\alpha-\alpha_0)}}{\alpha-\alpha_0} + \frac{e^{-i\varepsilon(\alpha+\alpha_0)}}{\alpha+\alpha_0} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_2(\alpha') K_-(\alpha, \alpha') d\alpha' &= \frac{e^{-i\varepsilon(\alpha-\alpha_0)}}{\alpha-\alpha_0} - \frac{e^{-i\varepsilon(\alpha+\alpha_0)}}{\alpha+\alpha_0} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

mit

$$K_{\pm}(\alpha, \alpha') = -\frac{k^2}{4\pi} \int_a^{\infty} dx \int_a^{\infty} dx' e^{-ik(x-\alpha'x')} \{H_0(k|x-x'|) \pm H_0(k|x+x'|)\}. \quad (17)$$

Mit der Substitution  $kx \rightarrow x + \varepsilon$ ,  $kx' \rightarrow x' + \varepsilon$  folgt aus (16) und (17)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\pm}(\alpha') \tilde{K}_{\pm}(\alpha, \alpha') d\alpha' = \frac{e^{i\varepsilon\alpha_0}}{\alpha-\alpha_0} \pm \frac{e^{-i\varepsilon\alpha_0}}{\alpha+\alpha_0} \quad (16')$$

mit

$$\tilde{\chi}_{\pm}(\alpha) = \tilde{\chi}_{1,2}(\alpha) e^{i\varepsilon\alpha} \quad (18)$$

und<sup>49)</sup>

$$\tilde{K}_{\pm}(\alpha, \alpha') = \tilde{K}_0(\alpha, \alpha') \pm \tilde{K}_w(\alpha, \alpha') \quad (17')$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \tilde{K}_0(\alpha, \alpha') &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dx' e^{-i(\alpha x - \alpha' x')} H_0(|x-x'|) \\ \tilde{K}_w(\alpha, \alpha') &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dx' e^{-i(\alpha x - \alpha' x')} H_0(x+x'+2\varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (17'')$$

Setzt man die Fourier-Darstellung (1.8) in (17'') ein, so folgt durch Ausführen der Integrationen nach  $x$  und  $x'$

$$\left. \begin{aligned} 2\pi i \tilde{K}_0(\alpha, \alpha') &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx''}{\sqrt{1-\alpha''^2}(\alpha''-\alpha)(\alpha'-\alpha'')} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha'^2}(\alpha'-\alpha)} + \frac{C_0(\alpha')-C_0(\alpha)}{\alpha'-\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

<sup>49)</sup>  $\tilde{K}_0$  bezieht sich auf die alleinige Anwesenheit einer Halbebene,  $\tilde{K}_w$  auf die Wechselwirkung beider Halbebenen.

$$\left. \begin{aligned} 2\pi i \tilde{K}_w(\alpha, \alpha') &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\varepsilon\alpha''} d\alpha''}{\sqrt{1-\alpha''^2}(\alpha''-\alpha)(\alpha''+\alpha')} \\ &= \frac{C(-\alpha')-C(\alpha)}{\alpha'+\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

wobei  $C_0(\alpha)$  sich für  $\varepsilon = 0$  aus  $C(\alpha)$  ergibt mit  $C(\alpha)$  aus (9)<sup>50</sup>.

Die Kerne (19a, b) können wir noch vereinfachen, wenn wir davon Gebrauch machen, daß  $\tilde{\chi}_{\pm}(\alpha)$  in  $S^-$  holomorph ist. In der Tat folgt aus (1.42) oder der jeweils zweiten Gl. (1.45a, b) mit (18)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\pm}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} = 0. \quad (20)$$

Setzt man also (17') mit (19a, b) in (16') ein, so kann man wegen (20) die Glieder mit  $C_0(\alpha)$  und  $C(\alpha)$  weglassen. Außerdem kann auch das Glied mit  $C_0(\alpha')$  fortbleiben, da nach (9) auch  $C_0(\alpha')$  in  $S^-$  holomorph ist, so daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\pm}(\alpha') C(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} = 0. \quad (20')$$

Somit ist Gl. (16') mit

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\pm}(\alpha') \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\alpha'^2}(\alpha'-\alpha)} \pm \frac{C(-\alpha')}{\alpha'+\alpha} \right\} d\alpha' &= \frac{e^{i\varepsilon\alpha_0}}{\alpha-\alpha_0} \pm \frac{e^{-i\varepsilon\alpha_0}}{\alpha+\alpha_0} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\pm}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha'-\alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

äquivalent<sup>51</sup>).

Bringt man nun in der ersten Gl. (21) den zweiten Term links auf die rechte Seite und löst dann (21) mit Hilfe von (2.29) formal nach  $\tilde{\chi}_{\pm}(\alpha)$  auf, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\chi}_{\pm}(\alpha) &= \mp \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\pm}(-\alpha') C(\alpha') \sqrt{1+\alpha'} \frac{d\alpha'}{\alpha'-\alpha} \\ &\quad - \sqrt{1-\alpha} \left\{ \frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0} \pm \frac{\sigma(-\alpha_0)}{\alpha+\alpha_0} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (22)^{52}$$

<sup>50</sup> Die Form (19a, b) mit  $C(\alpha)$  aus (9') ergibt sich auch unmittelbar aus (17'') durch partielle Integration.

<sup>51</sup> Trägt man hier  $C(-\alpha)$  aus (9) ein, so gelangt man nach Vertauschung der Integrationen und mit (18) zu den Gln. (1.45a, b).

<sup>52</sup> Aus Gl. (1.32a, b) folgt entsprechend

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{\varphi}_1(\alpha)}{\sigma(-\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_2(\alpha') \sqrt{1+\alpha'} e^{-i\varepsilon\alpha'} C(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha'-\alpha} &= -\frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0} \\ \frac{\bar{\varphi}_2(\alpha)}{\sigma(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_1(\alpha') \sqrt{1-\alpha'} e^{-i\varepsilon\alpha'} C(-\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha'-\alpha} &= \frac{\sigma(-\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0} \end{aligned} \right\}$$

Dies sind zwei simultane Integralgleichungen der Form (2.42); sie gehen mit  $C(\alpha)$  aus (9) nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge in (2.69) über.

Wir versuchen jetzt Gl. (22) asymptotisch zu lösen, indem wir  $C(\alpha)$  nach fallenden Potenzen von  $\varepsilon$  entwickeln (s. unten):

$$C(\alpha) \rightarrow \varepsilon^{-1/2} C_1(\alpha) + \varepsilon^{-3/2} C_3(\alpha) + \varepsilon^{-5/2} C_5(\alpha) + \dots \quad (23)$$

und entsprechend für  $\tilde{\chi}_{\pm}(\alpha)$  den Ansatz

$$\tilde{\chi}_{\pm}(\alpha) \rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{-\nu/2} \tilde{\chi}_{\pm}^{(\nu)}(\alpha) \quad (24)$$

machen. Trägt man (23) und (24) in (22) ein, so ergibt sich durch Vergleich der Koeffizienten gleicher Potenzen von  $\varepsilon$  das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\chi}_{\pm}^{(0)}(\alpha) &= -\sqrt{1-\alpha} \left\{ \frac{\sigma(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0} \pm \frac{\sigma(-\alpha_0)}{\alpha+\alpha_0} \right\} \\ \tilde{\chi}_{\pm}^{(1)}(\alpha) &= \mp \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\pm}^{(0)}(-\alpha') C_1(\alpha') \sqrt{1+\alpha'} \frac{d\alpha'}{\alpha'-\alpha} \\ \tilde{\chi}_{\pm}^{(2)}(\alpha) &= \mp \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\pm}^{(1)}(-\alpha') C_1(\alpha') \sqrt{1+\alpha'} \frac{d\alpha'}{\alpha'-\alpha} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

allgemein

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\chi}_{\pm}^{(2\nu)}(\alpha) &= \mp \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{\chi}_{\pm}^{(1)}(-\alpha') C_{2\nu-1}(\alpha') + \tilde{\chi}_{\pm}^{(3)}(-\alpha') C_{2\nu-3}(\alpha') \\ &\quad + \dots + \tilde{\chi}_{\pm}^{(2\nu-1)}(-\alpha') C_1(\alpha')] \sqrt{1+\alpha'} \frac{d\alpha'}{\alpha'-\alpha} \\ \tilde{\chi}_{\pm}^{(2\nu+1)}(\alpha) &= \mp \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{\chi}_{\pm}^{(0)}(-\alpha') C_{2\nu+1}(\alpha') + \tilde{\chi}_{\pm}^{(2)}(-\alpha') C_{2\nu-1}(\alpha') \\ &\quad + \dots + \tilde{\chi}_{\pm}^{(2\nu)}(-\alpha') C_1(\alpha')] \sqrt{1+\alpha'} \frac{d\alpha'}{\alpha'-\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Aus diesem System können wir also die einzelnen Glieder von (24) sukzessive durch Quadraturen berechnen.

Die Entwicklung (23) erhält man leicht, wenn man in (9') die zur Hankelschen asymptotischen Reihe vervollständigte Formel (11) einträgt und fortgesetzt partiell integriert. In Ergänzung zu (12) ergibt sich so

$$\left. \begin{aligned} C_1(\alpha) &= -\frac{\kappa}{2(1-\alpha)} \\ C_3(\alpha) &= \frac{i\kappa}{8} \left[ \frac{1}{4(1-\alpha)} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right] \\ C_5(\alpha) &= \frac{3\kappa}{32} \left[ \frac{3}{32(1-\alpha)} + \frac{1}{4(1-\alpha)^2} + \frac{1}{(1-\alpha)^3} \right] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (27)^{53})$$

<sup>53)</sup> Da  $C(\alpha)$  in  $S^-$  holomorph ist, ist der Pol  $\alpha = 1$  in (27) zu  $S^+$  zu rechnen.

mit

$$\kappa = \frac{e^{i\left(2\varepsilon + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi}}. \quad (28)$$

Bei der Auswertung von (25) bedienen wir uns der Formeln

$$\bar{\varphi}_1(x_0, \alpha) = \frac{e^{-i\varepsilon\alpha}}{2} [\tilde{\chi}_+(x_0, \alpha) + \tilde{\chi}_-(x_0, \alpha)] \quad (29)$$

$$\bar{\varphi}_1(-x_0, -\alpha) = \frac{e^{i\varepsilon\alpha}}{2} [\tilde{\chi}_+(x_0, -\alpha) - \tilde{\chi}_-(x_0, -\alpha)], \quad (29')$$

die aus (1.42), (1.40) und (18) folgen. Aus der ersten Gl. (25) ergibt sich zunächst mit (29)

$$\bar{\varphi}_1^{(0)}(x_0, \alpha) = -\frac{\sigma(x_0)\sigma(-\alpha)}{\alpha - \alpha_0} \quad (30)$$

in Übereinstimmung mit (4). Setzt man weiter die erste Gl. (25) in die zweite ein, so folgt mit (29) und (29') sowie (27)

$$\bar{\varphi}_1^{(1)}(x_0, \alpha) = -\frac{\kappa}{2} \sigma(-\alpha_0) \frac{\sigma(-\alpha)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\alpha') dx'}{(x' - \alpha_0)(x' - \alpha)(\alpha' - 1)} \quad (31)$$

also (Residuenkalkül)

$$\bar{\varphi}_1^{(1)}(x_0, \alpha) = -\kappa \frac{\sigma(-\alpha_0)\sigma(-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\alpha_0)}. \quad (31')$$

Damit erhält man das zweite Glied der asymptotischen Reihe

$$\varphi_1(x_0, \alpha) \rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^{-r/2} \bar{\varphi}_1^{(r)}(x_0, \alpha) \quad (32)$$

in Übereinstimmung mit dem in (14) ausgeschriebenen Term. Das dritte Glied von (32) ergibt sich schließlich aus der dritten Gl. (25) auf die gleiche Weise zu

$$\bar{\varphi}_1^{(2)}(x_0, \alpha) = \kappa^2 \frac{\sigma(x_0)\sigma(-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\alpha_0)}. \quad (33)$$

Auch sämtliche weiteren Glieder der Reihe (32) lassen sich aus (26) und (27) mit Hilfe des Residuenkalküls mühelos berechnen.

**3. Kirchhoffsche Lösung.** Wir werfen zum Zweck des Vergleichs einen Blick auf die Kirchhoffsche Lösung. Die Kirchhoffsche Theorie ersetzt das Randwertproblem durch folgendes Sprungwertproblem: es ist diejenige Lösung  $v_K$  der Wellengleichung zu bestimmen, die dieselbe Singularität wie  $v_0$  besitzt und die beim Hindurchtreten durch den Schirm die Sprünge

$$\{v_K\}_+ - \{v_K\}_- = v_0, \quad \left\{ \frac{\partial v_K}{\partial z} \right\}_+ - \left\{ \frac{\partial v_K}{\partial z} \right\}_- = \frac{\partial v_0}{\partial z}$$

besitzt; beim Hindurchtreten durch die Öffnung soll jedoch  $v_K$  und  $\partial v_K / \partial z$  stetig sein ( $v_K$  ist dadurch eindeutig bestimmt). Dieses Problem, das bekannt-

lich durch das Kirchhoffsche Integral

$$v_K(x, z) = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_0 \end{Bmatrix} - \frac{i}{4} \int_{-a}^a \left\{ v_0 \frac{\partial}{\partial z'} H_0^1(kR) - \frac{\partial v_0}{\partial z'} H_0^1(kR) \right\} dx', \quad z \geq 0 \quad (34)$$

gelöst wird, können wir auch durch ein zu (1.9) analoges Fourier-Integral

$$v_K(x, z) = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\varphi}_K^{(1)}(\alpha) \pm \hat{\varphi}_K^{(2)}(\alpha)] e^{ik(\alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}|z|)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad z \geq 0 \quad (34')$$

lösen. Die oben angeführten Sprung- bzw. Stetigkeitsrelationen liefern dann für die Fourier-Amplituden  $\hat{\varphi}_K^{(1)}$  und  $\hat{\varphi}_K^{(2)}$  die Beziehungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_K^{(1)}(\alpha) e^{ik\alpha x} d\alpha = \begin{cases} 0 & , \quad |x| > a \\ \pi i \sqrt{1-\alpha_0^2} e^{ik\alpha_0 x} & , \quad |x| < a \end{cases} \quad (35a)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\varphi}_K^{(2)}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{ik\alpha x} d\alpha = \begin{cases} 0 & , \quad |x| > a \\ \pi i e^{ik\alpha_0 x} & , \quad |x| < a. \end{cases} \quad (35b)$$

Durch Fourier-Umkehrung folgt daraus

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varphi}_K^{(1)}(\alpha) &= i \sqrt{1-\alpha_0^2} \frac{\sin \varepsilon(\alpha - \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \\ \hat{\varphi}_K^{(2)}(\alpha) &= i \sqrt{1-\alpha^2} \frac{\sin \varepsilon(\alpha - \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Beschränkt man sich in (34') auf  $z > 0$ , so gehört also zur Kirchhoffschen Lösung die Fernfeldamplitude<sup>54)</sup>

$$\hat{\varphi}_K(\alpha_0, \alpha) = i \left( \sqrt{1-\alpha_0^2} + \sqrt{1-\alpha^2} \right) \frac{\sin \varepsilon(\alpha - \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}. \quad (36')$$

Das Randwertproblem und das Sprungwertproblem haben zunächst nichts miteinander zu tun. Vergleicht man jedoch (36') mit der asymptotischen Lösung (4'), die wir hier nach dem Vorbilde von (1.41') mit (2.68) in der Form

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varphi}^{(0)}(\alpha_0, \alpha) &= -2\pi i \sqrt{1-\alpha^2} \delta(\alpha - \alpha_0) + \hat{\varphi}^{(0)}(\alpha_0, \alpha) \\ \hat{\varphi}^{(0)}(\alpha_0, \alpha) &= \left[ \sqrt{(1-\alpha_0)(1+\alpha)} - \sqrt{(1+\alpha_0)(1-\alpha)} \right] \frac{\cos \varepsilon(\alpha - \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \\ &\quad + i \left[ \sqrt{(1-\alpha_0)(1+\alpha)} + \sqrt{(1+\alpha_0)(1-\alpha)} \right] \frac{\sin \varepsilon(\alpha - \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

schreiben wollen<sup>55)</sup>, so ergibt sich

$$\Im \hat{\varphi}_K(\alpha_0, \alpha) = \Im \hat{\varphi}^{(0)}(\alpha_0, \alpha) = 2\varepsilon \sqrt{1-\alpha_0^2}. \quad (38)$$

Für  $\varepsilon \gg 1$  können wir den Realteil  $\Re \hat{\varphi}^{(0)}(\alpha_0, \alpha) = (1-\alpha_0^2)^{-1/2}$  — der von der Größenordnung  $\varepsilon^0$  ist — gegenüber dem Imaginärteil vernachlässigen. Für

<sup>54)</sup> Wir schreiben  $\hat{\varphi}_K$ , da in (34') die einfallende Welle  $v_0$  für  $z > 0$  nicht auftritt, im Gegensatz zu (1.9).  $\hat{\varphi}_K$  ist also mit  $\hat{\varphi}$  aus (1.41') zu vergleichen.

<sup>55)</sup> Vgl. (1.31') und (1.31'').

die Einfallrichtung  $\alpha = \alpha_0$  stimmt also die Fernfeldamplitude der Lösung des Sprungwertproblems mit der asymptotischen Lösung des Randwertproblems überein<sup>56)</sup>. Daraus erklärt sich die gute Übereinstimmung der Kirchhoffschen Lösung mit der Erfahrung für kleine Beugungswinkel<sup>57)</sup>.

4. Transmissionskoeffizient. Da die linearen Feldgrößen mit dem Zeitfaktor  $e^{-i\omega t}$  behaftet sind, läßt sich die über eine Periode  $\omega/2\pi$  gemittelte Energiestromdichte (Pointingscher Vektor) in der Form

$$\overline{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \Im m (v^* \text{ grad } v) \quad (39)$$

darstellen (überstreichen bedeutet Zeitmittelwert; der Stern den Übergang zur konjugiert komplexen Größe).  $\overline{\mathcal{E}}$  ist für  $z > 0$  quellenfrei, daher ergibt sich die im Zeitmittel durch die Öffnung strömende Energie  $W$  in den beiden Formen

$$W = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \Im m \left\{ \int_0^\pi v^* \frac{\partial v}{\partial r} r d\theta \right\} = \frac{1}{2} \Im m \left\{ \int_{-a}^a v^* \frac{\partial v}{\partial z} dx \right\}_{z=0}. \quad (40)^{53)}$$

Die erste Formel (40) läuft auf die Integration der Fernfeldintensität (d. h.  $|\hat{\varphi}|^2$ ) hinaus. Einfacher kommt man jedoch mit der zweiten Formel (40) zum Ziel, obwohl in der Öffnung nicht die übersichtlichen Verhältnisse des Fernfeldes anzutreffen sind. Das Feld in der Öffnung ergibt sich aus (1.9) zu

$$v(x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\varphi}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{ik\alpha x} d\alpha, \quad (41)$$

dabei bedeutet  $\hat{\varphi}(\alpha)$  wie bisher die Fernfeldamplitude  $\bar{\varphi}(\alpha)$  nach Abspaltung des  $\delta$ -Terms; vgl. (1.41') und (37). Der Beitrag dieses  $\delta$ -Terms zum Integral in (1.9) kompensiert für  $z > 0$  gerade die einfallende Welle, während er für  $z < 0$  die reflektierte Welle liefert. Ferner ergibt sich aus (1.9) mit Hilfe der zweiten Gl. (1.11) für die  $z$ -Ableitung

$$v_z(x, 0) = ik\sqrt{1-\alpha_0^2} e^{ik\alpha_0 x} \quad \text{für } |x| \leq a \quad (41')$$

(sie stimmt also in der Öffnung mit der  $z$ -Ableitung der einfallenden Welle in Strenge überein). Trägt man (41) und (41') in die zweite Gl. (40) ein, so

<sup>56)</sup> Dies gilt ebenso auch für die andere Randbedingung  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ ; vgl. H. Hönl u. K. Westpfahl, l. c. Übrigens ergibt sich aus (1.24) für den Spalt

$$\hat{\varphi}_0(\alpha) = -2\pi i \sqrt{1-\alpha^2} \delta(\alpha - \alpha_0) + 2\hat{\varphi}_K^{(2)}; \quad (36'')$$

für den regulären Term folgt also ebenfalls

$$\Im m \hat{\varphi}_0(\alpha_0, \alpha_0) = 2\varepsilon \sqrt{1-\alpha_0^2}. \quad (38')$$

Die Näherung (36'') ließe sich formal mit Hilfe des in § 1.4 entwickelten Verfahrens schrittweise verbessern. Es ist jedoch ungewiß, ob diese Methode gegen die Lösung von (1.36) bzw. (1.41) konvergiert.

<sup>57)</sup> Für im Endlichen gelegene Aufpunkte (Fresnelsche Beugung) findet sich eine numerische Auswertung des Kirchhoffschen Integrals bei E. Lommel, Abh. d. Bayer. Akad. 15, 531 (1886). Neuere experimentelle Untersuchungen bei H. Burkhardt, ebd. Heft 65 (1954).

<sup>58)</sup> Man kann das Integrationsintervall  $-a \leq x \leq a$  zu  $-\infty < x < \infty$  erweitern da der Schirm zufolge der Randbedingung nichts beiträgt.

ergibt sich

$$W = \frac{k}{4\pi} \sqrt{1 - \alpha_0^2} \Im \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\varphi}(\alpha)}{\sqrt{1 - \alpha^2}} e^{i k(x - \alpha_0) x} d\alpha \right\} \quad (42)$$

und nach dem Fourier-Theorem

$$W = \frac{1}{2} \Im \hat{\varphi}(\alpha_0). \quad (42')$$

Dieser erstaunlich einfache Zusammenhang zwischen dem Energieflußintegral  $W$  und der Fernfeldamplitude in der Einfallrichtung gilt übrigens für eine große Klasse von Beugungsproblemen<sup>59)</sup>.

5. Nach der geometrischen Optik strömt im Zeitmittel die Energie

$$W_0 = \frac{1}{24} \Im \left\{ \int_{-a}^a v_0^* \frac{\partial v_0}{\partial z} dx \right\} = \varepsilon \sqrt{1 - \alpha_0^2} \quad (43)$$

durch den Spalt. Das Verhältnis

$$\tau = \frac{W}{W_0} = \frac{\Im \hat{\varphi}(\alpha_0)}{2 \varepsilon \sqrt{1 - \alpha_0^2}} \quad [(44)]$$

bezeichnet man als Transmissionskoeffizient.

Mit Hilfe der asymptotischen Lösung (37) ergibt sich mit (38) der geometrisch optische Grenzwert  $\tau^{(0)} = 1$ . Ebenso liefert die Kirchhoffsche Lösung (36') den Wert  $\tau_K = 1$ . Einen genaueren Wert für  $\varepsilon \gg 1$  erhält man für (44) mit Hilfe der asymptotischen Reihe (30) bis (33):

$$\tau \rightarrow 1 - \frac{\varepsilon^{-1/2}}{2 \sqrt{\pi} \sqrt{1 - \alpha_0^2}} \left\{ \frac{\cos \left[ 2 \varepsilon (1 - \alpha_0) - \frac{\pi}{4} \right]}{1 - \alpha_0} + \frac{\cos \left[ 2 \varepsilon (1 + \alpha_0) - \frac{\pi}{4} \right]}{1 + \alpha_0} \right\} + \frac{\varepsilon^{-2} \cos 4 \varepsilon}{\pi (1 - \alpha_0^2)} + \dots \quad (45)$$

5. Ergebnisse für den breiten und den schmalen Spalt. Wir wollen zum Abschluß die Resultate für die Beugung am Spalt bei der Randbedingung  $v = 0$  zusammenstellen und sie durch Angaben ergänzen, die sich auf die Randbedingung  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$  beziehen. Zur Unterscheidung der beiden Randbedingungen bezeichnen wir die Lösung für die Randbedingung  $v = 0$  mit  $v_{||}$ , diejenige für  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$  mit  $v_{\perp}$ .  $v_{||}$  bzw.  $v_{\perp}$  können als elektrische bzw. magnetische Feldstärke eines (bezüglich der elektrischen Feldstärke) parallel bzw. senkrecht zu den Schirmrändern polarisierten elektromagnetischen Feldes aufgefaßt werden. Die vollständigen Felder ergeben sich dann in der Form

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= (0, v_{||}, 0), & -i k \mathfrak{H} &= Z \left( \frac{\partial v_{||}}{\partial z}, 0, -\frac{\partial v_{||}}{\partial x} \right) \\ \text{bzw.} & & & \\ \mathfrak{H} &= (0, v_{\perp}, 0), & i k Z \mathfrak{E} &= \left( \frac{\partial v_{\perp}}{\partial z}, 0, -\frac{\partial v_{\perp}}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

<sup>59)</sup> Vgl. etwa H. Levine u. J. Schwinger, Physic. Rev. **74**, 958 (1948); **75**, 1423 (1949).

mit

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad Z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \quad (47)$$

( $\varepsilon_0$  ist die Dielektrizitätskonstante,  $\mu_0$  die Permeabilität des homogenen Mediums, in das der Schirm eingebettet ist).

Aus (1.9) folgt mit (1.41')

$$v_{||}(x, z) = v_{||}^{(g)}(x, z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\varphi}_{||}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{ik(\alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}|z|)} d\alpha, \quad z \geq 0 \quad (48a)$$

entsprechend

$$v_{\perp}(x, z) = v_{\perp}^{(g)}(x, z) \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_{\perp}(\alpha) e^{ik(\alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}|z|)} d\alpha, \quad z \geq 0 \quad (48b)$$

wobei

$$v_{||}^{(g)}(x, z) = \begin{cases} 0, & z > 0 \\ v_0(x, z) - v_0(x, -z), & z < 0 \end{cases} \quad (49a)$$

$$v_{\perp}^{(g)}(x, z) = \begin{cases} 0, & z > 0 \\ v_0(x, z) + v_0(x, -z), & z < 0 \end{cases} \quad (49b)$$

mit  $v_0(x, z) = e^{ik(\alpha_0 x + \sqrt{1-\alpha_0^2}z)}$  das geometrisch optische Feld bedeutet.

Für das Fernfeld hinter dem Schirm ( $\vartheta < \pi$ ) gilt<sup>60)</sup>, vgl. (1.13)

$$v_{||}(r, \vartheta) \rightarrow \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} \hat{\varphi}_{||}(\cos \vartheta) \quad (50a)$$

bzw.

$$v_{\perp}(r, \vartheta) \rightarrow \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} \sin \vartheta \hat{\varphi}_{\perp}(\cos \vartheta). \quad (50b)$$

Asymptotisch für  $\varepsilon = ka \gg 1$  gilt, vgl. (4') und (15)

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varphi}_{||}(\alpha_0, \alpha) &\rightarrow \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \left[ \sqrt{1 - \alpha_0} (1 + \alpha) e^{i\varepsilon(\alpha - \alpha_0)} - \sqrt{1 + \alpha_0} (1 - \alpha) \right. \\ &\quad \cdot e^{-i\varepsilon(\alpha - \alpha_0)} - \varepsilon^{-1/2} \frac{e^{i(2\varepsilon + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{e^{i\varepsilon(\alpha + \alpha_0)}}{\sqrt{(1 + \alpha)(1 + \alpha_0)}} + \frac{e^{-i\varepsilon(\alpha + \alpha_0)}}{\sqrt{(1 - \alpha)(1 - \alpha_0)}} \right] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \right\} \quad (51a)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varphi}_{\perp}(\alpha_0, \alpha) &\rightarrow \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \left[ \sqrt{\frac{1 + \alpha_0}{1 + \alpha}} e^{i\varepsilon(\alpha - \alpha_0)} - \sqrt{\frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha}} e^{-i\varepsilon(\alpha - \alpha_0)} \right. \\ &\quad - \varepsilon^{-1/2} \frac{e^{i(2\varepsilon - \frac{\pi}{4})}}{8\sqrt{\pi}} \left[ \sqrt{\frac{1 - \alpha_0}{1 + \alpha}} \frac{e^{i\varepsilon(\alpha + \alpha_0)}}{(1 + \alpha_0)(1 + \alpha)} + \sqrt{\frac{1 + \alpha_0}{1 - \alpha}} \frac{e^{-i\varepsilon(\alpha + \alpha_0)}}{(1 - \alpha_0)(1 - \alpha)} \right] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \right\} \quad (51b)$$

<sup>60)</sup> Für  $\vartheta > \pi$  ergibt sich das entsprechende Fernfeld, wenn man beachtet, daß der Beugungsterm in (48a) bzw. (48b) symmetrisch bzw. antisymmetrisch in  $z$  ist.

Der andere Grenzfall des „schmalen“ Spalts ( $\varepsilon < 1$ ) ist in letzter Zeit mehrfach behandelt worden; wir notieren das Ergebnis der Entwicklung nach steigenden Potenzen von  $\varepsilon^{61}$ )

$$\hat{\varphi}_{||}(\alpha_0, \alpha) = -\frac{\varepsilon^2 \pi}{2} \sqrt{1 - \alpha_0^2} \sqrt{1 - \alpha^2} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{8} \left[ \frac{3}{2} - 2p - \alpha_0^2 + \alpha_0 \alpha - \alpha^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^4}{16} \left[ \frac{7}{16} + p^2 - \frac{5p}{4} + \frac{p\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_0^2}{3} + \frac{\alpha_0^4}{12} + \frac{1 - \alpha_0^2}{6} \alpha_0 \alpha \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} - p - \frac{2\alpha_0^2}{3} \right) \alpha^2 - \frac{\alpha_0 \alpha^3}{6} + \frac{\alpha^4}{12} \right] + \dots \right\} \quad (52a)$$

bzw.

$$\hat{\varphi}_{\perp}(\alpha_0, \alpha) = \frac{-\pi}{p\sqrt{1 - \alpha^2}} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \frac{1 - \alpha_0^2}{2} - p\alpha_0\alpha - \frac{\alpha^2}{2} \right] \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon^4}{16} \left[ \frac{p}{4} - \frac{1}{8p} - \frac{1}{4} \left( \frac{3}{4} - 3\alpha_0^2 + \alpha_0^4 \right) - \frac{p\alpha_0^2}{2} + 2p \left( \frac{1}{4} + p - \frac{\alpha_0^2}{2} \right) \alpha_0 \alpha \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{3}{4} - \frac{p}{2} + (p-1)\alpha_0^2 \right) \alpha^2 + p\alpha_0\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{4} \right] + \dots \right\} \quad (52b)$$

mit

$$p = \ln \frac{\gamma \varepsilon}{4} - \frac{\pi i}{2}, \quad \ln \gamma = 0,577215 \dots \quad (\text{Eulersche Konstante}). \quad (53)$$

Somit ergibt sich aus (50) das Fernfeld für  $\varepsilon \gg 1$  ( $\vartheta < \pi$ )

$$v_{||}(r, \vartheta) \rightarrow 2 \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi k r}} \left\{ \sin \frac{\vartheta_0 - \vartheta}{2} \frac{\cos \varepsilon(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} \right. \\ \left. + i \sin \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \frac{\sin \varepsilon(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} - \varepsilon^{-1/2} \frac{e^{i\left(2\varepsilon + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi \sin \vartheta_0 \sin \vartheta}} \right. \\ \left. \cdot \left[ \cos \frac{\vartheta_0 - \vartheta}{2} \cos \varepsilon(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) - i \cos \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \sin \varepsilon(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \right] \right. \\ \left. + \dots \right\} \quad (54a)$$

<sup>61)</sup> Sie ist von mehreren Autoren nach verschiedenen Methoden berechnet worden: Lord Rayleigh, Phil. Mag. **43**, 259 (1897). Proc. Roy. Soc. London (A) **89**, 194 (1913). — A. Sommerfeld, l. c. S. 279–296. — R. Jäckel, J. reine angew. Math. **180**, 141 (1951). — N. Marcuvitz, Waveguide Handbook, New York 1951, S. 147. — E. Groschwitz u. H. Hönl, Z. Physik **181**, 305 (1952). — C. J. Bowkamp, New York Research Rep. EM-50 (1953); Rep. Progr. Phys. **17**, 35 (1954). — R. Müller u. K. Westpfahl; Z. Physik **184**, 245 (1953). — H. Hönl u. E. Zimmer; Z. Physik **185**, 196 (1953). — C. J. Tranter; Quart. Journ. Mech. App. Math. **7**, 317 (1954). — Am vollständigsten ist die Behandlung bei A. T. Hoop, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. (B) **58**, 401 (1955), der wir die folgenden Ergebnisse entnehmen. Siehe auch Y. Nomura u. S. Kantsura, Journ. Phys. Soc. Jap. **12**, 190 (1957).

bzw.

$$v_{\perp}(r, \vartheta) \rightarrow 2 \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\pi k r}} \left\{ -\sin \frac{\vartheta_0 - \vartheta}{2} \frac{\cos \varepsilon (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} \right. \\ + i \sin \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \frac{\sin \varepsilon (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} \\ - \varepsilon^{-1/2} \frac{e^{i(2\varepsilon - \frac{\pi}{4})}}{16 \sqrt{\pi}} \left[ \frac{\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}{\cos \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}} e^{i\varepsilon (\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} \right. \\ \left. \left. + \frac{\operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\vartheta}{2}} e^{-i\varepsilon (\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} \right] + \dots \right\} \quad (54b)$$

Hier besitzt der jeweils erste Term ein ausgeprägtes Maximum für die Einfallrichtung  $\vartheta = \vartheta_0$ . Beim zweiten Term ist dies hingegen nicht der Fall, da er von der Wechselwirkung der Spaltbacken herrührt.

Die Kirchhoffsche Theorie andererseits liefert für das Fernfeld hinter dem Schirm [vgl. (36')]

$$v_K(r, \vartheta) \rightarrow -\frac{e^{i(kr - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k r}} (\sin \vartheta_0 + \sin \vartheta) \frac{\sin \varepsilon (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} \quad (55)$$

Berechnet man das Absolutquadrat des Fernfeldes, so ergibt sich die Fernfeldintensität  $I_{||}$  bzw.  $I_{\perp}$ . Wir beschränken uns in (54) auf das erste Glied und erhalten für beide Randbedingungen übereinstimmend

$$I^{(0)} = \frac{2}{\pi k r} \left[ \sin \vartheta_0 \sin \vartheta \left( \frac{\sin \varepsilon (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} \right)^2 + \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2}} \right], \quad (56)$$

während sich aus (55)

$$I_K = \frac{1}{2\pi k r} (\sin \vartheta + \sin \vartheta_0)^2 \left( \frac{\sin \varepsilon (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} \right)^2 \quad (56)$$

ergibt. Für  $\vartheta \rightarrow \vartheta_0$  stimmt der erste Term in (56) mit (56') überein; da dieser Term aber dann ersichtlich proportional  $\varepsilon^2$  wird, fällt der zweite additive Term in (56) demgegenüber für  $\varepsilon \gg 1$  nicht ins Gewicht (er liefert einen sehr schwachen Schleier, der sich dem Kirchhoffschen Interferenzbild überlagert).

Zum Vergleich schreiben wir auch das Fernfeld für  $\varepsilon < 1$  an ( $\vartheta < \pi$ )

$$v_{||}(r, \vartheta) \rightarrow -\frac{\varepsilon^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2 k r}} e^{i(kr + \frac{\pi}{4})} \sin \vartheta_0 \sin \vartheta \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{8} \left[ \frac{3}{2} - 2p - \cos^2 \vartheta_0 + \cos \vartheta_0 \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta \right] \right. \\ + \frac{\varepsilon^4}{16} \left[ \frac{7}{16} + p^2 - \frac{5p}{4} + \frac{p}{2} \cos \vartheta_0 - \frac{\cos^2 \vartheta_0}{3} + \frac{\cos^4 \vartheta_0}{12} \right. \\ + \frac{\sin^2 \vartheta_0}{6} + \cos \vartheta_0 \cos \vartheta - \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} - p - \frac{2}{3} \cos^2 \vartheta_0 \right) \cos^2 \vartheta \\ \left. \left. - \frac{1}{6} \cos \vartheta_0 \cos^3 \vartheta + \frac{\cos^4 \vartheta}{12} \right] + \dots \right\} \quad (54'a)$$

bzw.

$$v_{\perp}(r, \vartheta) \rightarrow -\frac{1}{p} \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{i(kr + \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \frac{\sin^2 \vartheta_0}{2} - p \cos \vartheta_0 \cos \vartheta - \frac{\cos^2 \vartheta}{2} \right] - \frac{\varepsilon^4}{16} \left[ \frac{p}{4} - \frac{1}{8p} - \frac{1}{4} \left( \frac{3}{4} - 3 \cos^2 \vartheta_0 + \cos^4 \vartheta_0 \right) - \frac{p}{2} \cos^2 \vartheta_0 + 2p \left( \frac{1}{4} + p - \frac{\cos^2 \vartheta_0}{2} \right) \cos \vartheta_0 \cos \vartheta + \left( \frac{3}{4} - \frac{p}{2} + (p-1) \cos^2 \vartheta_0 \right) \cos^2 \vartheta + p \cos \vartheta_0 \cos^3 \vartheta + \frac{\cos^4 \vartheta}{4} \right] + \dots \right\} \quad (54'b)$$

Beim engen Spalt zeigt also die Fernfeldintensität für die beiden Polarisationsfälle ein ganz verschiedenes Verhalten:

$$\left. \begin{aligned} I_{\parallel} &= \frac{\pi \varepsilon^4}{8kr} \sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \vartheta \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \left[ \frac{3}{2} - 2 \ln \frac{\gamma \varepsilon}{4} - \cos^2 \vartheta_0 + \cos \vartheta_0 \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta \right] + \dots \right\} \\ I_{\perp} &= \frac{2\pi}{kr \left( 4 \ln \frac{\gamma \varepsilon}{4} + \pi^2 \right)} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \sin^2 \vartheta_0 - 2 \ln \frac{\gamma \varepsilon}{4} \cos \vartheta_0 \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta \right] + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (56'')$$

Für den Transmissionskoeffizienten

$$\tau_{\parallel} = \frac{\Im \hat{\varphi}_{\parallel}(\alpha_0, \alpha_0)}{2\varepsilon \sqrt{1 - \alpha_0^2}} \quad (57a)$$

bzw.

$$\tau_{\perp} = \frac{1}{2\varepsilon} \Im \hat{\varphi}_{\perp}(\alpha_0, \alpha_0) \quad (57b)$$

ergibt sich aus (51)

$$\tau_{\parallel} = 1 - \frac{\varepsilon^{-1/2}}{2\pi \sqrt{1 - \alpha_0^2}} \left\{ \frac{\cos \left[ 2\varepsilon(1 - \alpha_0) - \frac{\pi}{4} \right]}{1 - \alpha_0} + \frac{\cos \left[ 2\varepsilon(1 + \alpha_0) - \frac{\pi}{4} \right]}{1 + \alpha_0} \right\} + \dots \quad (58a)$$

bzw.

$$\tau_{\perp} = 1 + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{16\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{\frac{1 + \alpha_0}{1 - \alpha_0}} \frac{\cos \left[ 2\varepsilon(1 - \alpha_0) + \frac{\pi}{4} \right]}{(1 - \alpha_0)^2} + \sqrt{\frac{1 - \alpha_0}{1 + \alpha_0}} \frac{\cos \left[ 2\varepsilon(1 + \alpha_0) + \frac{\pi}{4} \right]}{(1 + \alpha_0)^2} \right\} + \dots \quad (58b)$$

und aus (52)

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\parallel} &= \frac{\varepsilon^3 \pi^2}{32} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \frac{5}{8} - q - \frac{\alpha_0}{2} \right] + \frac{\varepsilon^4}{16} \left[ \frac{109}{96} - \frac{\pi^2}{4} + 3q^2 - \frac{7q}{2} + 2q\alpha_0^2 - \frac{17\alpha_0^2}{16} + \frac{5\alpha_0^4}{12} \right] + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (59a)$$

bzw.

$$\tau_{\perp} = \frac{\pi^2}{\varepsilon(4q^2 + \pi^2)\sqrt{1 - \alpha_0^2}} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} [1 - 2\alpha_0^2] + \frac{\varepsilon^4}{32} \left[ \frac{3}{8} + \frac{2q}{4q^2 + \pi^2} \right] - \left( 3 - \frac{16}{4q^2 + \pi^2} \right) \alpha_0^2 + 3\alpha_0^4 + \dots \right\} \quad (59b)$$

mit

$$q = \operatorname{Re} p = \ln \frac{\gamma \varepsilon}{4}. \quad (60)$$

Nach der strengen Fassung des Babinet'schen Theorems<sup>62)</sup> ist zugleich mit der Lösung für die Beugung am Spalt auch diejenige für die Beugung am Streifen der Breite  $2a$  gefunden. Bezeichnen wir diese Lösung mit  $u_{||}$  bzw.  $u_{\perp}$ , so gilt nämlich

$$u_{||}(x, z) = v_0(x, z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_{\perp}(\alpha) e^{ik(\alpha x + \sqrt{1 - \alpha^2}|z|)} d\alpha, \quad z \geq 0 \quad (61a)$$

bzw.

$$u_{\perp}(x, z) = v_0(x, z) \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_{||}(\alpha) e^{ik(\alpha x + \sqrt{1 - \alpha^2}|z|)} d\alpha, \quad z \geq 0. \quad (61b)$$

Der Streukoeffizient des Streifens ergibt sich damit wie folgt

$$\sigma_{||} = 2\tau_{\perp}, \quad \sigma_{\perp} = 2\tau_{||}. \quad (62)$$

Um das Übergangsgebiet zwischen dem schmalen und breiten Spalt zu erfassen, kann man sich der Methode der Separation der Wellengleichung in den Koordinaten des elliptischen Zylinders bedienen. Sie führt auf Mathieusche Funktionen, nach denen sich die Lösung des Randwertproblems (1.2, 3) entwickeln läßt<sup>63)</sup>. Entsprechend kann man auch die Lösung der Integralgleichung (1.7) für den Spalt als Entwicklung nach diesen Funktionen darstellen<sup>64)</sup>, da sie die Eigenfunktionen der entsprechenden homogenen Fredholm'schen Integralgleichung zweiter Art sind. Diese Reihen konvergieren für alle  $\varepsilon$ . Für die numerische Rechnung sind sie aber praktisch nur im Bereich  $0 \leq \varepsilon \leq 10$  brauchbar (da die Zahl der zu berücksichtigenden Reihenglieder etwa ebenso groß ist wie der Parameter  $\varepsilon$ )<sup>65)</sup>. Andererseits ist über die Konvergenz bzw. den Konvergenzradius der Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von  $\varepsilon$  nichts bekannt. Wie wir unten an Hand des numerischen Vergleichs sehen werden, ist die Konvergenz fraglich, bzw. der Konvergenzradius gegebenenfalls wahrscheinlich recht klein. Einen für alle Spaltbreiten (bzw. Wellenlängen) qualitativ richtigen Verlauf des Fernfeldes bzw. des Transmissionskoeffizienten erhält man mit Hilfe einer Variationsmethode<sup>66)</sup>.

<sup>62)</sup> Vgl. Baker-Copson, l. c. S. 166—168.

<sup>63)</sup> W. Wien, *Jahrd. deutsch. Math. Ver.* **15**, 42 (1906). — B. Sieger, *Ann. Physik* **27**, 622 (1908). — M. J. O. Strutt, *Z. Physik* **69**, 597 (1931). — P. M. Morse u. P. J. Rubenstein, *Physic. Rev.* **54**, 895 (1938). — R. J. Pellam, *J. Acoust. Soc. Amer.* **11**, 396 (1940). — S. Skavlem, *Arch. Math. Naturw.* **51**, 61 (1951). — E. B. Moullin u. F. M. Phillips, *Proc. Inst. Elec. Engrs.* **IV**, **99**, 137 (1952). —

<sup>64)</sup> J. W. Miles, *J. Math. Phys.* **28**, 223 (1950). — J. Dörr, *Z. angew. Math. Phys.* **3**, 427 (1952).

<sup>65)</sup> Wir wollen die Lösung in Gestalt der Reihe nach Mathieuschen Funktionen der Kürze halber die „strenge Lösung“ nennen.

<sup>66)</sup> J. W. Miles, *Physic. Rev.* **75**, 695 (1949). — A. Erdélyi u. C. H. Payas, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **40**, 128 (1954).

In Abb. 8 bis 10 ist der Transmissionskoeffizient  $\tau_{||}$  als Funktion von  $\varepsilon$  für verschiedene Einfallswinkel  $\vartheta_0$  aufgetragen. Für senkrechte Inzidenz

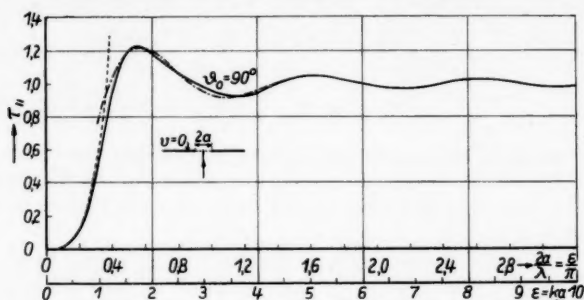


Abb. 8. Transmissionskoeffizient  $\tau_{||}$  des Spalts (Breite  $2a$ ) bei senkrechter Inzidenz einer ebenen Welle (Randbedingung  $v = 0$ ) als Funktion von  $\varepsilon = ka$ . Ausgezogen nach

Skavlem, strichpunktirt nach Gl. (3.58a), gestrichelt nach Gl. (3.59a) ( $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ )

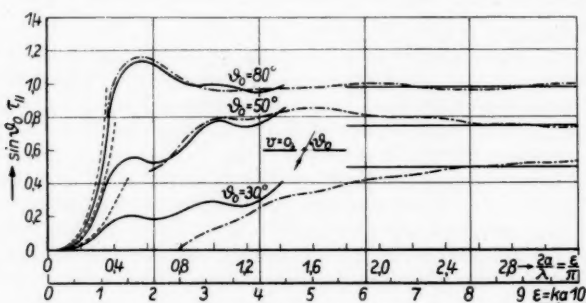


Abb. 9

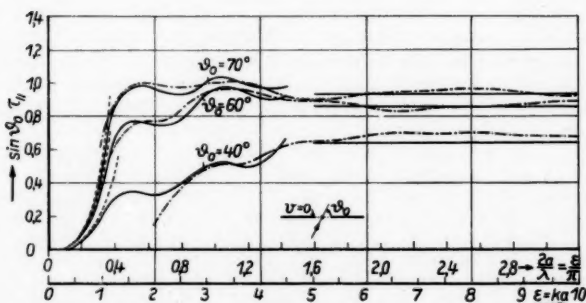


Abb. 10

Abb. 9 u. 10. Transmissionskoeffizient  $\tau_{||}$  des Spalts bei schiefer Inzidenz einer ebenen Welle (Einfallswinkel  $\vartheta_0$ , Randbedingung  $v = 0$ ). Ausgezogen nach Morse-Rubenstein, strichpunktirt nach Gl. (3.58a), gestrichelt nach Gl. (3.59a)

liegt eine (tabellarisch gegebene) numerische Auswertung der Reihen nach Mathieuschen Funktionen im Bereich  $0 \leq \varepsilon \leq 10$  vor<sup>67)</sup> (ausgezogene Kurve in Abb. 8). Die strichpunktierte Kurve in Abb. 8 ist nach der asymptotischen Formel (58a) gezeichnet; die gestrichelte nach (59a) (für  $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ ). Die asymptotische Reihe liefert demnach eine ausgezeichnete Annäherung, die sich für  $\varepsilon > 5$  praktisch nicht mehr von der strengen Lösung unterscheidet; darüber hinaus aber noch bis etwa  $\varepsilon = 1,5$  brauchbar ist. Andererseits ist die Näherung (59a) (obwohl dreigliedrig) nur im Bereich  $0 \leq \varepsilon < 1$  brauchbar. Für schiefe Inzidenz (Abb. 9 u. 10) liegt nur eine graphische Darstellung des Transmissionskoeffizienten nach der strengen Lösung für  $0 \leq \varepsilon < 5$  vor<sup>68)</sup> (die Zeichengenauigkeit ist hier besonders für kleine  $\varepsilon$  recht klein). Die Annäherung durch die asymptotische Formel ist hier weniger gut und wird mit kleiner werdendem Einfallswinkel zusehends schlechter. (Auf den Grund dafür gehen wir weiter unten ein.)

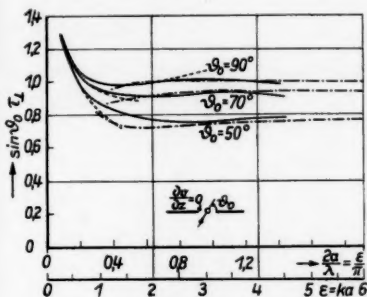


Abb. 11

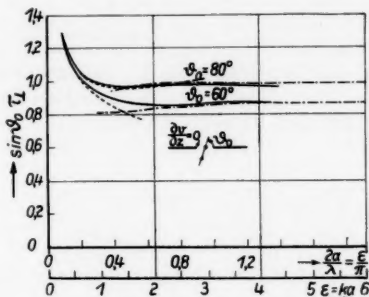


Abb. 12

Abb. 11 u. 12. Transmissionskoeffizient  $\tau_{\perp}$  des Spalts für eine unter dem Winkel  $\vartheta_0$  einfallende ebene Welle (Randbedingung  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ ) als Funktion von  $\varepsilon = ka$  ( $2a$  Spaltbreite,  $k$  Wellenzahl). Ausgezogen nach Morse-Rubenstein, strichpunktiert nach Gl. (3.58b), gestrichelt nach Gl. (59b) (ausschließlich des Gliedes mit  $\varepsilon^4$ )

Der Transmissionsfaktor  $\tau_{\perp}$  ist in Abb. 11 u. 12 dargestellt (strenge Werte für  $\varepsilon < 5$  ausgezogen nach Skavlem bzw. Morse-Rubenstein). Die asymptotische Darstellung nach (58b) (strichpunktiert) schmiegt sich relativ gut an, während wir bei der Reihe (59b) (gestrichelt) das Glied mit  $\varepsilon^4$  fortgelassen haben um eine brauchbare Annäherung zu erhalten. (Bei Beibehaltung des Gliedes mit  $\varepsilon^4$  lösen sich die gestrichelten Kurven erheblich schneller von den strengen)<sup>69)</sup>

<sup>67)</sup> S. Skavlem, l. c.; S. N. Karp u. A. Russek, l. c.

<sup>68)</sup> P. M. Morse u. P. J. Rubenstein, l. c.

<sup>69)</sup> Für  $\varepsilon < 1$  liegen die numerischen Werte von Skavlem (für  $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ ) erwartungsgemäß auf der gestrichelten Kurve, während die graphische Darstellung bei Morse-Rubenstein (für alle  $\vartheta_0$ ) für  $\varepsilon < 1$  erheblich unter der gestrichelten Kurve nach (59b) bleibt. Wir haben jedoch die ausgezogenen Kurven so abgeändert, daß sie für  $\varepsilon < 1$  mit den gestrichelten zusammenfallen.

6. Streifende Inzidenz. Für streifenden Einfall ( $\vartheta_0 \rightarrow 0, \pi$ ) und Beobachtungswinkel in der Nähe des Schirmes ( $\vartheta \rightarrow 0, \pi$ ) werden die Wechselwirkungsglieder in (54a, b) singulär. Für diesen Fall ist daher die aus der Sattelpunktmethode hervorgegangene Darstellung (50a, b) des Fernfeldes unbrauchbar. Sie muß jetzt durch eine modifizierte Auswertung des vollständigen Ausdrucks (48a, b) ersetzt werden.

Wir werfen zunächst einen Blick auf die entsprechenden Verhältnisse bei der Beugung an der Halbebene. Setzt man (2.66') in (1.12) ein, so ergibt sich

$$v(r, \vartheta) = e^{i k r \cos(\vartheta - \vartheta_0)} + \frac{\cos \frac{\vartheta_0}{2}}{\pi i} \int_D \frac{e^{i k r \cos(\vartheta' + \vartheta)}}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta_0} \sin \frac{\vartheta'}{2} d\vartheta', \quad \vartheta \leq \pi. \quad (63)$$

Bei der Auswertung dieses Integrals nach der Sattelpunktmethode müssen wir den Integrationsweg  $D$  in die Fallinie  $D_s$  durch den Sattelpunkt  $\vartheta'_s = \frac{1}{2}(\vartheta + \vartheta_0)$  (für  $\vartheta \leq \pi$ ) verlegen. Dabei wird der Pol  $\vartheta' = \vartheta_0$  eingefangen, falls  $\vartheta$  dem Intervall  $0 \leq \vartheta < \vartheta_0$  oder  $2\pi - \vartheta_0 < \vartheta \leq 2\pi$  angehört. Der Beitrag des Pols (Residuum) ergibt zusammen mit der einfallenden Welle das geometrisch optische Verhalten.

$$v_g(r, \vartheta) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \vartheta < \vartheta_0 \\ e^{i k r \cos(\vartheta - \vartheta_0)} & \text{für } \vartheta_0 < \vartheta < 2\pi - \vartheta_0 \\ e^{i k r \cos(\vartheta - \vartheta_0)} - e^{i k r \cos(\vartheta + \vartheta_0)} & \text{für } 2\pi - \vartheta_0 < \vartheta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (64)$$

Aus (63) folgt also für  $r \rightarrow \infty$  mit (1.13)

$$v(r, \vartheta) \rightarrow v_g(r, \vartheta) \mp 2 \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k r}} \frac{\cos \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\vartheta}{2}}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0} \quad (\vartheta \leq \pi). \quad (65)$$

Dieser Ausdruck wird für die Einfallsrichtung  $\vartheta \rightarrow \vartheta_0$  und Reflexionsrichtung  $\vartheta \rightarrow 2\pi - \vartheta_0$  singulär. In der Nähe dieser Winkel muß also (63) nach einer anderen Methode ausgewertet werden. Am zweckmäßigsten ist es, das vollständige Feld (63) durch Fresnelsche Integrale darzustellen<sup>70)</sup>.

$$v(r, \vartheta) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\{ e^{i k r \cos(\vartheta - \vartheta_0)} \int_{\infty}^{2\sqrt{\frac{k r}{\pi} \sin \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}}} e^{\frac{i\pi}{2} \sigma^2} d\sigma - e^{i k r \cos(\vartheta + \vartheta_0)} \int_{\infty}^{-2\sqrt{\frac{k r}{\pi} \sin \frac{\vartheta + \vartheta_0}{2}}} e^{\frac{i\pi}{2} \sigma^2} d\sigma \right\} \quad (\vartheta \leq \pi). \quad (63')$$

In der Nähe der Einfalls- bzw. Reflexionsrichtung liefert nur der erste bzw. zweite Term von (63') einen merklichen Beitrag zum Fernfeld.

<sup>70)</sup> Vgl. H. Hönl u. K. Westpfahl, l. c.

Wir setzen nun den Wechselwirkungsterm von (51a) in (48a) ein und erhalten für das Wechselwirkungsfeld in erster Näherung, vgl. (31'):

$$v_{||}^{(1)}(r, \vartheta) \rightarrow \varepsilon^{-1/2} \frac{e^{i\left(2z + \frac{\pi}{4}\right)}}{\pi i \sqrt{\pi}} \left\{ \sin \frac{\vartheta_0}{2} \frac{e^{-i\varepsilon \cos \vartheta_0}}{\cos \vartheta_0 - 1} \cdot \oint_D \frac{e^{i k r \cos(\vartheta' \mp \vartheta)}}{\cos \vartheta' - 1} \sin \frac{\vartheta'}{2} d\vartheta' + \dots \right\} \quad (66)$$

(mit  $x - a = r \cos \vartheta$ ,  $z = r \sin \vartheta$ ). Der durch .... angedeutete Term geht dabei aus dem angeschriebenen hervor, indem man  $\vartheta'$  durch  $\pi - \vartheta'$ ,  $\vartheta$  durch  $\pi - \vartheta$  und  $\vartheta_0$  durch  $\pi - \vartheta_0$  (sowie  $x$  durch  $-x$ ) ersetzt. Die Größen  $r$  und  $\vartheta$  in den beiden Termen sind also zunächst jeweils verschieden definiert ( $\vartheta$  ist jeweils der Winkel, den der jeweilige Radiusvektor  $r$  vom Beobachtungspunkt zur rechten bzw. linken Schirmkante mit dem Schirm einschließt). Dieser Unterschied kann jedoch für das Fernfeld vernachlässigt werden ( $r$  und  $\vartheta$  sind dann wie bisher die in Abb. 5 eingezeichneten Größen). Das angeschriebene Integral in (66) stimmt mit dem zweiten Term von (63) für  $\vartheta_0 = 0$  (streifende Inzidenz) überein. Mit Hilfe von (63') ergibt sich somit nach einfachen Umformungen<sup>71)</sup>

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \oint_D \frac{e^{i k r \cos(\vartheta' \pm \vartheta)}}{\cos \vartheta' - 1} \sin \frac{\vartheta'}{2} d\vartheta' \\ &= \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{i k r \cos \vartheta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sqrt{\frac{k r}{\pi} \sin \frac{\vartheta}{2}}}{e^{\frac{i\pi}{2} \sigma^2}} d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Setzt man dies in (66) ein, so folgt

$$\left. \begin{aligned} v_{||}^{(1)}(r, \vartheta) \rightarrow & -\frac{e^{2i\varepsilon}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \left\{ \frac{e^{i(kr \cos \vartheta - \varepsilon \cos \vartheta_0)}}{\sin \frac{\vartheta_0}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sqrt{\frac{k r}{\pi} \sin \frac{\vartheta}{2}}}{e^{\frac{i\pi}{2} \sigma^2}} d\sigma \right. \\ & \left. + \frac{e^{-i(kr \cos \vartheta - \varepsilon \cos \vartheta_0)}}{\cos \frac{\vartheta_0}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sqrt{\frac{k r}{\pi} \cos \frac{\vartheta}{2}}}{e^{\frac{i\pi}{2} \sigma^2}} d\sigma \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (66')$$

und dieser Ausdruck ist für  $\vartheta \rightarrow 0, \pi$  regulär. Da nun das Fernfeld gegenüber einer Vertauschung von  $\vartheta$  und  $\vartheta_0$  invariant sein muß (Reziprozitätstheorem)<sup>72)</sup> [vgl. (54a)], so müssen wir auch die Faktoren mit  $1/\sin \frac{\vartheta_0}{2}$  bzw.  $1/\cos \frac{\vartheta_0}{2}$  durch entsprechende Fresnelsche Integrale ersetzen, die dann auch für  $\vartheta_0 \rightarrow 0, \pi$  regulär sind.

<sup>71)</sup> Unter Beachtung der Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi}{2} \sigma^2} d\sigma = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

<sup>72)</sup> Siehe H. Levine u. J. Schwinger, l. c. (1949).

## Anhang

## Zusammenstellung der im Text gelösten singulären Integralgleichungen

Im folgenden sei  $L(\alpha)$  (bzw.  $L_1(\alpha)$ ,  $L_2(\alpha) \dots$ ) eine analytische Funktion des komplexen Arguments  $\alpha$ , die in einem beliebig schmalen, die reelle Achse enthaltenden Streifen holomorph ist und dort keine Nullstellen hat. Ferner sei  $\operatorname{arc} L(\alpha)|_{-\infty}^{\infty} = 0$  ( $\alpha$  reell) und für die „Faktorisierung“ [vgl. (2.17) bis (2.22a)]:

$$L(\alpha) = \frac{L^+(\alpha)}{L^-(\alpha)} \quad (1)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} L^+(\alpha) &= \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln L(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \right] \\ L^-(\alpha) &= \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln L(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

gelte für  $|\alpha| \rightarrow \infty$ 

$$\left. \begin{aligned} L^+(\alpha) &= O(\alpha^{\gamma_1}), \quad L^-(\alpha) = O(\alpha^{\gamma_2}) \\ -1 &< \gamma_{1,2} < 1. \end{aligned} \right\} \quad (1'')$$

(Ferner ist  $\varphi \dots$  die gesuchte und  $f, g, \dots, A, B, \dots$  sind gegebene Funktionen. Die mit den willkürlichen Konstanten  $C \dots$  behafteten Glieder sind Lösungen der jeweils homogenen Integralgleichung. Bei den Hakenintegralen ist der Pol des Integranden in der durch den Haken angedeuteten Weise durch einen unendlich kleinen Halbkreis zu umgehen.)

## A. Singuläre Integralgleichungen vom Cauchyschen Typ

## 1. Integralgleichung der Einkantenprobleme [vgl. (2.14 bis (2.31)].

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [L(\alpha') \varphi(\alpha') + f(\alpha')] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha_1} &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(\alpha') - g(\alpha')] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{L^-(\alpha)}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\alpha')}{L^-(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \right\} + C L^-(\alpha) \quad (2')$$

(C = 0 für  $\gamma_{1,2} \geq 0$ ).

## 1a) Beispiel zu 1. „Beugung an der Halbebene“ [vgl. (2.65, 66)].

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\varphi(\alpha')}{\sqrt{1 - \alpha'^2}} + f(\alpha') \right] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha') &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + \alpha'} f(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \quad (3')$$

2. Singuläre Integralgleichung vom Cauchyschen Typ [vgl. (2.42) bis (2.49')].

$$A(\alpha) \varphi(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha') \varphi(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} = f(\alpha) \quad (4)$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{L^+(\alpha) - L^-(\alpha)}{2\pi i B(\alpha)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{L^-(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \right\} + C \frac{L^+(\alpha) - L^-(\alpha)}{B(\alpha)} \quad (4')$$

mit

$$L(\alpha) = \frac{A(\alpha)}{A(\alpha) + B(\alpha)} \quad (4'')$$

$$(C = 0 \text{ für } \gamma_{1,2} \geq 0).$$

2'. Spezielles System von Integralgleichungen des Typs 2 [vgl. (2.51) bis (2.64)].

$$\left. \begin{aligned} L(\alpha) \varphi_1(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_2(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= f_1(\alpha) \\ \varphi_2(\alpha) - \frac{L(\alpha)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(\alpha')}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= f_2(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\alpha) &= \frac{f_1(\alpha)}{L(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i L^+(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} [L^-(\alpha') g(\alpha') + L^+(\alpha') \varphi(\alpha')] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ &\quad + \frac{C_1}{L^+(\alpha)} + \frac{C_2}{L^+(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} L^+(\alpha') L^-(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(\alpha) &= f_2(\alpha) + \frac{1}{2\pi i L^-(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} [L^-(\alpha') g(\alpha') + L^+(\alpha') \varphi(\alpha')] \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ &\quad + \frac{C_1}{L^-(\alpha)} + \frac{C_2}{L^-(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} L^+(\alpha') L^-(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$

mit

$$\varphi(\alpha) = \frac{L^-(\alpha)}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_2(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \right\} \quad (5c)$$

$$g(\alpha) = f_1(\alpha) - f_2(\alpha)$$

$$\left( \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} \right) = 0 \text{ für } \gamma_1 \leq 0, \quad \gamma_2 \leq 0. \quad C_1 = C_2 = 0$$

$$\text{für } \gamma_1 \geq 0, \quad \gamma_2 \leq 0 \text{ oder } \gamma_1 \leq 0, \quad \gamma_2 \geq 0 \Big).$$

3. Integralgleichung der Zweikantenprobleme [vgl. (2.80') bis (2.91)].

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha') \varphi(\alpha') \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= -f(\alpha) \\ \varphi(\alpha) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha') \frac{\sin \varepsilon(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} d\alpha' &= g(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

zurückführbar auf ein System von Integralgleichungen des Typs 2.

$$\left. \begin{aligned} A(x) \varphi_1(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} A(x') \varphi_2(x') \frac{dx'}{x' - x} &= F(x) \\ B(x) \varphi_2(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} B(x') \varphi_1(x') \frac{dx'}{x' - x} &= G(x) \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \\ A(x) &= e^{i\varepsilon x} L^+(x), \quad B(x) = \frac{e^{-i\varepsilon x}}{L^-(x)} \\ F(x) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{B(x')} \frac{dx'}{x' - x} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} A(x') g(x') \frac{dx'}{x' - x} \\ G(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{A(x')} \frac{dx'}{x' - x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} B(x') g(x') \frac{dx'}{x' - x} \end{aligned} \right\} \quad (6'')$$

3a) Beispiel zu 3. „Beugung am Streifen“ [vgl. (1.55)]

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x')}{\sqrt{1-x'^2}} \frac{\sin \varepsilon(x' - x)}{x' - x} dx' &= -f(x) \\ \varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x') \frac{\sin \varepsilon(x' - x)}{x' - x} dx' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

zurückführbar auf

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{i\varepsilon x}}{\sqrt{1+x}} \varphi_1(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\varepsilon x'}}{\sqrt{1+x'}} \varphi_2(x') \frac{dx'}{x' - x} &= F(x) \\ \frac{e^{-i\varepsilon x}}{\sqrt{1-x}} \varphi_2(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\varepsilon x'}}{\sqrt{1-x'}} \varphi_1(x') \frac{dx'}{x' - x} &= G(x) \end{aligned} \right\} \quad (6a')$$

mit

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varepsilon x'} \sqrt{1-x'} f(x') \frac{dx'}{x' - x} \\ G(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varepsilon x'} \sqrt{1+x'} f(x') \frac{dx'}{x' - x} \end{aligned} \right\} \quad (6a'')$$

## B. Integralgleichungen vom Wiener-Hopf-Typus

4. Wiener-Hopf [vgl. (2.32) bis (2.41)].

(a, b beliebig.)

$$a \varphi(x) - b \int_0^{\infty} \varphi(x') K(x - x') dx = f(x) \quad (x > 0) \quad (7)$$

$$\varphi(x) = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\tilde{f}(\alpha)}{L^+(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} L^-(\alpha') e^{i\alpha' x} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} + C \int_{-\infty}^{\infty} L^-(\alpha) e^{i\alpha x} dx \quad (7')$$

mit

4a)

5. [a<sub>p</sub>,

a<sub>1</sub>ϕ<sub>1</sub>(x)

a<sub>2</sub>ϕ<sub>2</sub>(x)

zurückf

mit

Ann.

mit

$$\left. \begin{aligned} L(\alpha) &= b \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-i\alpha x} dx - a \\ \bar{f}(\alpha) &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \end{aligned} \right\} \quad (6'')$$

(C = 0 für  $\gamma_{1,2} \geq 0$ ).

4a) Beispiel zu 4. „Beugung an der Halbebene“ [vgl. (1.30) bis (1.31)].

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) H_0(|x-x'|) dx' = f(x) \quad (x > 0) \quad (7a)$$

$$\varphi(x) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \sqrt{1+\alpha} f(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1-\alpha'} e^{i\alpha' x} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \quad (7'a)$$

5. [vgl. (2.93) bis (2.100)].

(a, b, beliebig,  $\varepsilon > 0$ .)

$$\left. \begin{aligned} a_1 \varphi_1(x) - b_1 \int_{\varepsilon}^{\infty} [\varphi_1(x') K_1(x-x') + \varphi_2(-x') K_1(x+x')] dx' &= f_1(x) \quad (x > \varepsilon) \\ a_2 \varphi_2(x) - b_2 \int_{-\infty}^{-\varepsilon} [\varphi_2(x') K_2(x-x') + \varphi_1(-x') K_2(x+x')] dx' &= f_2(x) \quad (x < -\varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

zurückführbar auf ein System von Integralgleichungen des Typs 2.

$$\left. \begin{aligned} A_1(\alpha) \bar{\varphi}_1(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} B_1(\alpha') \bar{\varphi}_2(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= g_1(\alpha) \\ A_2(\alpha) \bar{\varphi}_2(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} B_2(\alpha') \bar{\varphi}_1(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= g_2(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (8')$$

mit

$$\bar{\varphi}_1(\alpha) = \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi_1(x) e^{-i\alpha x} dx, \quad \bar{\varphi}_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi_2(x) e^{-i\alpha x} dx \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1(\alpha) &= \frac{e^{i\varepsilon\alpha}}{L_1(\alpha)}, & A_2(\alpha) &= e^{-i\varepsilon\alpha} L_2^+(\alpha) \\ B_1(\alpha) &= \frac{b_1 e^{i\varepsilon\alpha} \bar{K}_1(\alpha)}{L_1^+(\alpha)}, & B_2(\alpha) &= b_2 e^{-i\varepsilon\alpha} \bar{K}_2(\alpha) L_2^-(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{1,2}(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{1,2}(x) e^{-i\alpha x} dx \\ L_1(\alpha) &= b_1 \bar{K}_1(\alpha) - a_1 = \frac{L_1^+(\alpha)}{L_1^-(\alpha)} \\ L_2(\alpha) &= -b_2 \bar{K}_2(\alpha) + a_2 = \frac{L_2^+(\alpha)}{L_2^-(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (10')$$

$$\left. \begin{aligned} g_1(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\varepsilon\alpha'} f_1(\alpha')}{L_1^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ g_2(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varepsilon\alpha'} \bar{f}_2(\alpha') L_2^-(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_1(x) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} f_1(x) e^{-i\alpha x} dx \\ \bar{f}_2(x) &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_2(x) e^{-i\alpha x} dx. \end{aligned} \right\} \quad (11')$$

5a) Beispiel zu 5. „Beugung am Spalt“ [vgl. (1.32) und (2.68) bis (2.79)].

$$\left. \begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} [\varphi_1(x') H_0(|x-x'|) + \varphi_2(-x') H_0(x+x')] dx' &= f(x) \quad (x > \varepsilon) \\ \int_{\varepsilon}^{\infty} [\varphi_2(-x') H_0(|x-x'|) + \varphi_1(x') H_0(x+x')] dx' &= f(-x) \quad (x > \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

zurückführbar auf

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{i\varepsilon x}}{\sqrt{1-\alpha}} \bar{\varphi}_1(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\varepsilon x'}}{\sqrt{1-\alpha'}} \bar{\varphi}_2(x') \frac{dx'}{\alpha' - \alpha} &= g_1(x) \\ \frac{e^{-i\varepsilon x}}{\sqrt{1+\alpha}} \bar{\varphi}_2(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\varepsilon x'}}{\sqrt{1+\alpha'}} \bar{\varphi}_1(x') \frac{dx'}{\alpha' - \alpha} &= g_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (12')$$

mit

$$\left. \begin{aligned} g_1(x) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\varepsilon x'}}{\sqrt{1+\alpha'}} \sqrt{1+\alpha'} f_1(x') \frac{dx'}{\alpha' - \alpha} \\ g_2(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\varepsilon x'}}{\sqrt{1-\alpha'}} \sqrt{1-\alpha'} f_2(x') \frac{dx'}{\alpha' - \alpha} \\ f_1(x) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x) e^{-i\varepsilon \alpha x} dx, \quad f_2(x) = \int_{\varepsilon}^{\infty} f(-x) e^{i\varepsilon \alpha x} dx. \end{aligned} \right\} \quad (12'')$$

### C. Duale Integralgleichungen

6.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(x) \varphi(x) e^{i\alpha x} dx &= -f(x) \quad (x > 0) \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\alpha x} dx &= g(x) \quad (x < 0) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

[Überführung in 1.]

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{L^-(x)}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\alpha')}{L^+(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{g}(\alpha')}{L^-(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \right\} + C L^-(x) \\ \bar{f}(x) &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx, \quad \bar{g}(x) = \int_{-\infty}^0 g(x) e^{-i\alpha x} dx \end{aligned} \right\} \quad (13')$$

(C = 0 für  $\gamma_{1,2} \geq 0$ ).

6a) Beispiel zu 6. „Beugung an der Halbebene“ [vgl. (1.30, 31) und (2.65) bis (2.66)].

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{i\alpha x} d\alpha &= -f(x) & (x > 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha &= 0 & (x < 0) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1+\alpha'} \bar{f}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha}. \quad (14')$$

7.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha) \varphi(\alpha) \frac{\cos \alpha x}{\sin \alpha x} d\alpha &= -f(x) & (x > \varepsilon) \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha &= g(x) & (x < \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

[mittels (13), (13')] zurückführbar auf

$$\left. \begin{aligned} A(\alpha) \varphi(\alpha) \mp \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} B(\alpha') \varphi(-\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= F(\alpha) \\ \text{mit} \\ A(\alpha) &= \frac{e^{i\varepsilon\alpha}}{L^-(\alpha)}, & B(\alpha) &= e^{i\varepsilon\alpha} \frac{L(-\alpha)}{L^+(\alpha)} \\ F(\alpha) &= \left( \frac{2}{2i} \right) \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{L^+(\alpha')} \bar{f}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{L^-(\alpha')} \bar{g}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha - \alpha'} \end{aligned} \right\} \quad (15')$$

$$\bar{f}(\alpha) = \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx, \quad \bar{g}(\alpha) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} g(x) e^{-i\alpha x} dx.$$

7a) Beispiel zu 7. „Beugung am Spalt“ [vgl. (1.44a, b) und (2.70)].

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{\cos \alpha x}{\sin \alpha x} d\alpha &= -\left( \frac{1/2}{1/2 i} \right) [f(x) \pm f(-x)] & (x > \varepsilon) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha &= 0 & (x < \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

zurückführbar auf

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{i\varepsilon\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} \varphi(\alpha) \mp \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\sqrt{1-\alpha'}} \varphi(-\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= F(\alpha) \\ F(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} e^{i\varepsilon\alpha'} \sqrt{1+\alpha'} \bar{f}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ \bar{f}(\alpha) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} [f(x) \pm f(-x)] e^{-i\alpha x} dx. \end{aligned} \right\} \quad (15'a)$$

8. [vgl. (2.80) bis (2.91)].

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(x) \varphi(x) e^{i\alpha x} dx &= -f(x) \quad (|x| < \varepsilon) \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\alpha x} dx &= g(x) \quad (|x| > \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

zurückführbar auf ein System von Integralgleichungen des Typs 2.

$$\left. \begin{aligned} A(\alpha) \varphi_1(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha') \varphi_2(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= F(\alpha) \\ B(\alpha) \varphi_2(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha') \varphi_1(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= G(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (16')$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) \\ A(\alpha) &= e^{i\varepsilon\alpha} L^+(\alpha), \quad B(\alpha) = \frac{e^{-i\varepsilon\alpha}}{L^-(\alpha)} \\ F(\alpha) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\alpha')}{B(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha') \bar{g}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ G(\alpha) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{A(\alpha')} \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha') \bar{g}(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ f(\alpha) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) e^{-i\alpha x} dx, \quad \bar{g}(\alpha) = \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right\} g(x) e^{-i\alpha x} dx. \end{aligned} \right\} \quad (16'')$$

8a) Beispiel zu 8. „Beugung am Streifen“.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{i\alpha x} dx &= -f(x) \quad (|x| < \varepsilon) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\alpha x} dx &= 0 \quad (|x| > \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

[durch Überführung in 3a)] zurückführbar auf

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{i\varepsilon\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}} \varphi_1(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\varepsilon\alpha'}}{\sqrt{1+\alpha'}} \varphi_2(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= F(\alpha) \\ \frac{e^{-i\varepsilon\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} \varphi_2(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\varepsilon\alpha'}}{\sqrt{1-\alpha'}} \varphi_1(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} &= G(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (17')$$

mit

$$\left. \begin{aligned} F(\alpha) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varepsilon\alpha'} \sqrt{1-\alpha'} f(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha} \\ G(\alpha) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varepsilon\alpha'} \sqrt{1+\alpha'} f(\alpha') \frac{d\alpha'}{\alpha' - \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (17'')$$

Herrn Professor H. Hönl möchte ich für sein stetes Interesse an dieser Arbeit aufrichtig danken.

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft hat einen großen Teil der Arbeit in dankenswerter Weise unterstützt.

Freiburg i. Br., Institut für theoretische Physik.

Bei der Redaktion eingegangen am 15. Januar 1959.

## Dielektrische Eigenschaften von Halbleitern

Von H. Rabenhorst und J. Raab

Mit 7 Abbildungen

### Inhaltsübersicht

Es werden die dielektrischen Eigenschaften von polykristallinem Selen, sowie von Germanium- und Siliziumeinkristallen in einem Meßkondensator zwischen 100 kHz und 400 kHz in Abhängigkeit von der Temperatur gemessen. Die von M. R. Freymann und Mitarbeitern an Selen und anderen elektronischen Halbleitern bei bestimmten Temperaturen und Frequenzen beobachteten Maxima des Verlustwinkels werden an Selen und Silizium ebenfalls festgestellt. Es wird aber gezeigt, daß diese Maxima keine Volumeneigenschaften der Halbleiter sind, sondern durch Kontakte an der Oberfläche des Halbleiters bedingt sind.

### 1. Einleitung

Das dielektrische Verhalten von Stoffen, deren Moleküle ein permanentes Dipolmoment besitzen, kann durch die Debyeschen Gleichungen beschrieben werden:

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_{\infty}}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (1)$$

$$\epsilon''(\omega) = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_{\infty}) \tau \omega}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (2)$$

$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_{\infty}) \tau \omega}{\epsilon_0 + \epsilon_{\infty} \omega^2 \tau^2}. \quad (3)$$

$\epsilon'$ ,  $\epsilon''$  Real- bzw. Imaginärteil der komplexen DK,  $\tan \delta$  Verlustwinkel,  $\epsilon_0$  statische DK,  $\epsilon_{\infty}$  DK für sehr hohe Frequenzen,  $\tau$  Relaxationszeit und  $\omega$  Kreisfrequenz. Die Gln. (1–3) gelten exakt nur für den Fall einer einzelnen Relaxationszeit. Sie können aber auch dann, wenn mehrere Relaxationszeiten dicht beieinander liegen, zur qualitativen Beschreibung der dielektrischen Eigenschaften eines Stoffes benutzt werden.

Ohne äußeres Feld sind die Dipole in einem Dielektrikum statistisch verteilt, die Summe ihrer Momente nach außen ist 0. Durch Anlegen eines äußeren Feldes wird das Gleichgewicht im Dielektrikum gestört, die Dipole werden durch das Feld ausgerichtet. Der Ausrichtung entgegen wirkt in flüssigen und festen Stoffen die Umgebung eines Dipols, die durch einen Potentialwall  $U$  dargestellt werden kann.  $\tau$  ist die Zeit, die zur Herstellung des Gleichgewichts bei Anwesenheit eines äußeren Feldes erforderlich ist.

$$\tau = A e^{\frac{U}{kT}} \quad (4)$$

$A$  ist eine Konstante.

Aus Gl. (2) folgt, daß  $\epsilon''$  für  $\omega\tau = 1$  einen maximalen Wert annimmt und aus Gl. (3) folgt ein Maximum von  $\tan\delta$  für  $\omega = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_\infty}}$ . Daraus ergibt sich die Möglichkeit,  $\tau$  durch Messung der Frequenzabhängigkeit von  $\epsilon''$  bzw.  $\tan\delta$  zu bestimmen. Wird außerdem  $\tau$  als Funktion der Temperatur gemessen, dann kann aus Gl. (4) die Aktivierungsenergie  $U$  bestimmt werden.

Nach Fröhlich<sup>1)</sup> ist der Übergang von Ladungsträgern in einem Ionenkristall von einer Fehlstelle zu einer unbesetzten benachbarten über einen Potentialwall  $U$  bei Anwesenheit eines äußeren Feldes mit der Bildung eines Dipolmomentes verbunden. Für das so erzeugte Moment gelten ebenfalls die Gln. (1–4).

Von M. R. Freymann und Mitarbeitern<sup>2–10)</sup> sind auch an elektronischen Halbleitern (Selen, Bor, Kupferoxydul u. a.) dielektrische Messungen zwischen 100 Hz und 400 kHz durchgeführt worden. Dabei wurde festgestellt, daß auch die dielektrischen Verluste dieser Halbleiter formal den Gln. (2) und (3) genügen und damit aus Gl. (4) eine Aktivierungsenergie berechnet werden kann. Diese soll nach Angabe der Autoren mit der für die elektronische Leitfähigkeit verantwortlichen Aktivierungsenergie recht gut übereinstimmen. Für Selen z. B. ergibt die Auswertung der Gl. (4) nach Meinzel<sup>2)5)</sup> eine Energie von 0,37 eV, während mit Absorptionsmessungen im sichtbaren Bereich 0,23 eV gemessen wurden. Über den Mechanismus, der bei elektronischen Halbleitern durch Anlegen eines äußeren Feldes zu Dipolmomenten führt und damit die Berechtigung zur Anwendung der Gln. (1–4) gibt, wird nichts ausgesagt.

Im folgenden werden dielektrische Messungen zwischen 100 und 400 kHz beschrieben, die an Germanium- und Siliziumeinkristallen, sowie an polykristallinem Selen ausgeführt wurden.

## 2. Meßmethode und Meßapparatur

Die Messung des Verlustwinkels  $\tan\delta$  und der DK  $\epsilon$  von Halbleitern bei Frequenzen zwischen 100 und 400 kHz in einem Meßkondensator ist schwierig, da der Verlustwinkel wegen der hohen Leitfähigkeit Werte größer als 1 annehmen kann und außerdem die Kapazität des Kondensators sehr groß wird. Mit der in Abb. 1 dargestellten Meßbrücke ist die Messung großer Kapazitäten und Verlustwinkel in dem angegebenen Frequenzbereich mit einer Genauigkeit von 2% für  $C$  und 3–5% für  $\tan\delta$  möglich. Für die Berechnung von  $C$

<sup>1)</sup> H. Fröhlich, *Theory of Dielectrics*, Oxford Univ. Press. 1949.

<sup>2)</sup> J. Meinzel, *J. Physique Radium* **15**, 124 (1954).

<sup>3)</sup> M. R. Freymann, *Cah. Phys.* **67**, 19 (1956), dort weitere Literaturangaben.

<sup>4)</sup> M. R. Rohmer, M. Freymann u. M. R. Freymann, *L'Onde Electr.* **35**, 465, (1955).

<sup>5)</sup> J. Meinzel, *L'Onde Electr.* **35**, 468 (1955).

<sup>6)</sup> M. R. Freymann, *Physica* **20**, 1115 (1954).

<sup>7)</sup> M. L. Blanchard u. M. Martin, *J. Physique Radium* **19**, 677, (1958).

<sup>8)</sup> M. R. Freymann, *Halbleiter und Phosphore*, (1958) S. 554–557. Vorträge des Int. Kolloquiums 1956 Garmisch-Partenkirchen.

<sup>9)</sup> J. Meinzel, E. Daniel u. Y. Colin, *J. Physique Radium* **17**, 79 (1956).

<sup>10)</sup> M. R. Freymann u. Mitarbeiter, *J. Physique Radium* **17**, 806 (1956).



5000 pF beträgt und daher gegenüber der Kapazität des Dielektrikums vernachlässigt werden kann. Anders bei Halbleitern im Temperaturbereich hoher Leitfähigkeit. Hier ist der Widerstand Kondensatorplatte-Halbleiteroberfläche oft viel größer als der Bahnwiderstand des Halbleiters.

Diese Schwierigkeiten lassen sich vermeiden, wenn die Kontaktimpedanz (Summe aus Widerstand der Spaltkapazität und Kontaktwiderstand) sehr klein gemacht wird. Das läßt sich z. B. durch Aufdampfen von Metallelektroden auf den Halbleiter erreichen. Auf die dabei entstehenden Schwierigkeiten wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

Das Schema der gesamten Meßapparatur ist in Abb. 2 angegeben. Der Meßkondensator hängt in einem abgedichteten Gefäß, das in Pentan eintaucht. Mit einer Kühlschlange, durch die flüssige Luft gepumpt wird, kann das Pentan abgekühlt werden. Zur Vermeidung von Eisbildung im Kondensator wird laufend getrocknete Luft durch das Gefäß gepumpt. Die Temperatur der Meßproben wird direkt an den Kondensatorplatten ermittelt.

### 3. Meßergebnisse und Diskussion

#### 3.1 Hochohmiges Selen

Eine hochohmige Selscheibe ( $\rho \sim 2 \cdot 10^4 \text{ Ohm cm}$ ) wurde mit und ohne aufgedampfte Metallelektroden gemessen. In Abb. 3 sind die Ergebnisse für Gold- und Eisenelektroden sowie für eine Messung ohne Elektroden

bei 400 kHz Meßfrequenz dargestellt. Die Messungen mit Elektroden sind unabhängig vom Elektrodenmaterial. Ein Maximum des Verlustwinkels tritt nur bei der Messung ohne Elektroden auf. In diesem Fall muß, wie bereits erwähnt, neben dem Bahnwiderstand und der Bahnkapazität des Sels noch eine Kontaktimpedanz auch im Ersatzschaltbild berücksichtigt werden. Die Bahneigenschaften des hochohmigen Sels können nur mit aufgedampften oder sonstigen guten Kontakten gemessen werden.

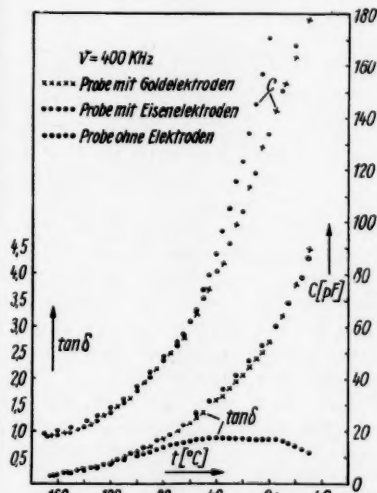


Abb. 3. Verlustwinkel und Kapazität einer hochohmigen Selscheibe bei 400 kHz Meßfrequenz

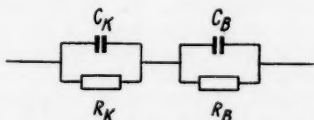


Abb. 4. Ersatzschaltbild für den Meßkondensator mit Halbleiter-Meßprobe

Im folgenden soll der Einfluß der Kontaktimpedanz abgeschätzt werden. Einfachheit halber ist angenommen, daß nur eine zusätzliche Impedanz auf einer Seite der Scheibe erforderlich wäre, die andere Seite habe einen idealen

Kontakt. Die Kontaktimpedanz wird dargestellt durch eine Parallelschaltung von  $R_K$  und  $C_K$  in Serie vor den Bahnwerten  $R_B$  und  $C_B$  (Abb. 4). Der Verlustwinkel des Kontaktes ist

$$\tan \delta_K = \frac{1}{R_K \omega C_K}.$$

Ohne Metallelektroden sind  $C_K$  und  $R_K$  sehr groß. In dem hier interessierenden Frequenzbereich  $\nu \leq 400$  kHz kann daher  $\tan \delta_K$  vernachlässigt werden. Damit wird der gesamte Verlustwinkel  $\tan \delta_g$  und die gesamte Kapazität  $C_g$  der in Abb. 4 dargestellten Anordnung

$$\tan \delta_g = \frac{C_K \tan \delta_B}{C_B (1 + \tan^2 \delta_B) + C_K}, \quad (7)$$

$$C_g = \frac{C_B^2 C_K (1 + \tan^2 \delta_B) + C_B C_K^2}{C_B^2 (1 + \tan^2 \delta_B) + C_K^2 + 2 C_B C_K}. \quad (8)$$

Die Kapazität  $C_K$  beträgt etwa 300–500 pF.  $C_B$  und  $\tan \delta_B$  können aus den in Abb. 3 dargestellten Kurven für die Messungen mit Metallelektroden entnommen werden. Für tiefe Temperaturen ist  $C_B (1 + \tan^2 \delta_B) \ll C_K$ , d. h. es wird nach Gl. (7)

$$\tan \delta_g = \tan \delta_B$$

(s. Abb. 3). Mit wachsender Temperatur steigen  $C_B$  und  $\tan \delta_B$  an und  $C_B (1 + \tan^2 \delta_B)$  kommt in die Größenordnung von  $C_K$ . Es wird jetzt

$$\tan \delta_g < \tan \delta_B.$$

Da  $C_K$  konstant ist, wächst zunächst  $\tan \delta_g$  mit steigender Temperatur an. Für  $t \sim 0^\circ \text{C}$  wird schließlich  $C_B (1 + \tan^2 \delta_B) > C_K C_B$  und  $\tan \delta_B$  wachsen nach Abb. 3 monoton an, d. h. mit steigender Temperatur nimmt  $\tan \delta_g$  monoton ab. Zwischen dem Ansteigen und Abfallen muß bei einer bestimmten Temperatur ein Maximum von  $\tan \delta_g$  liegen. Dieses Maximum ist aber nur durch den Kontakt und nicht durch das Volumen des Halbleiters bedingt.

Abb. 3 zeigt auch, daß die ohne Metallelektroden gemessene Kapazität  $C_g$  für  $\tan \delta_B > 1$  größer als die Kapazität  $C_B$  wird. Das folgt auch aus Gl. (8), wie sich leicht nachrechnen läßt. Mit abnehmendem Widerstand  $R_B$  kann der Einfluß der Kapazität  $C_B$  immer mehr vernachlässigt werden. Bei Temperaturen hoher Leitfähigkeit in Halbleitern wird daher die Messung von  $C_B$  und damit der Dielektrizitätskonstanten des Halbleiters praktisch unmöglich. Die großen Kapazitätswerte, die dann gemessen werden, stellen nicht mehr Bahneigenschaften dar sondern sind nur noch Eigenschaften der Übergangsimpedanz. Aus den gemessenen Werten  $\tan \delta_g$  und  $C_g$  können aus den oben genannten Gründen die Größen  $\epsilon'_B$  und  $\epsilon''_B$  nicht berechnet werden. Eine Auswertung der Meßergebnisse nach Gl. (4) ist daher nicht möglich.

### 3.2 Niederohmiges Selen

In Abb. 5 sind die Verlustwinkel einer niederohmigen Selseicheibe ( $\rho \sim 10^3 \text{ Ohm cm}$ ) angegeben. Dieses Selen wurde mit Kupfer- und Gold-elektroden bei je drei Frequenzen (100, 200 und 400 kHz) gemessen. Hierbei treten die Maxima für  $\tan \delta$  auch mit aufgedampften Elektroden auf und der Kurvenverlauf ist nach höheren Temperaturen scheinbar vom Elektrodenmaterial abhängig. Dieses Verhalten läßt sich folgendermaßen erklären: Auch

bei aufgedampften Elektroden treten noch Kontaktwiderstände und -kapazitäten auf, denn bei mehrmaligem Aufdampfen gleicher Elektrodenmetalle schwanken die Gleichstromwiderstände erheblich in ihren Werten. Bei hochohmigen Selen kann der Einfluß des Kontaktes wegen der Größe des Bahnwiderstandes und der kleinen Werte der Bahnkapazität vernachlässigt werden. Dagegen ist bei niederohmigen Selen die Kontaktimpedanz im allgemeinen von der Größenordnung der Bahnwerte. Das Ersatzschaltbild einer Parallelschaltung von  $R$  und  $C$  reicht ebenfalls nicht mehr aus, es muß eine Schaltung nach Abb. 4 angenommen werden. Es kommt hinzu, daß beim Kontakt

Metall-Halbleiter eine Randschicht auftritt, die im Ersatzschaltbild ebenfalls durch Parallelschaltung von  $R$  und  $C$  gekennzeichnet ist. Da  $\tan \delta_K$  im allgemeinen nicht mehr vernachlässigt werden kann, werden die den Gln. (7) und (8) jetzt entsprechenden Gleichungen wesentlich komplizierter. Es läßt sich aber mit der Abb. 5 zeigen, daß die Maxima von  $\tan \delta$  lediglich eine Folge des Kontaktes sind, denn sie sind um so ausgeprägter, je schlechter der Kontakt und je kleiner die Meßfrequenz ist, wobei der Gleichstromwiderstand ein Maß für die Güte des Kontaktes ist. Der Gleichstromwiderstand war mit Kupferelektroden wesentlich größer als mit Goldelektroden. Dieser Unterschied kann nicht auf das Elektrodenmaterial zurückgeführt werden, denn nach Schweickert<sup>11)</sup> liegen die Gleichstromwiderstände für die Kontakte Kupfer- bzw. Gold-Selen dicht beieinander. Mit Kupferelektroden treten nach Abb. 5 bei allen drei Frequenzen Maxima des Verlustwinkels auf, während sie mit Goldelektroden bei ansteigender Frequenz immer mehr verschwinden, da  $\tan \delta_K$  und  $C_K$  proportional  $1/\omega$  sind. Diese Frequenzabhängigkeit erklärt einmal die Verschiebung der Maxima nach tieferen Temperaturen mit abnehmender Frequenz, und zum anderen den Umstand, daß bei hohen Frequenzen ( $\nu \sim 10^{10}$  Hz) nur Bahneigenschaften gemessen werden.

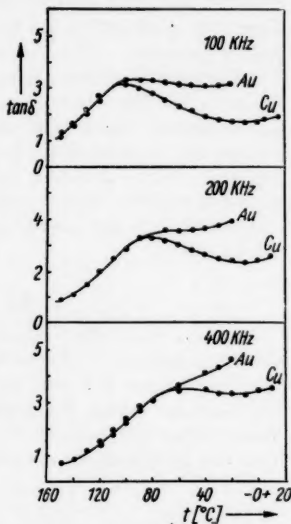


Abb. 5. Verlustwinkel einer niederohmigen Selseibe, gemessen mit Cu- und Au-Elektroden

### 3.3 Vergleich mit den Messungen von Meinnel<sup>2)5)</sup>

Bei diesem Vergleich zeigt sich zunächst, daß Meinnel wesentlich kleinere Werte für  $\epsilon''$  gemessen hat, als wir für  $\epsilon''$  angeben müßten, wenn die Berechnung dieser Größe in den oben angegebenen Fällen möglich wäre. Dieser Umstand läßt sich erklären, da Meinnel mit kristallinem Selenpulver gemessen hat. Solches Selen ist für Messungen im Frequenzbereich zwischen 100 Hz und 400 kHz ungeeignet. Die Betrachtungen, die unter 3.1 für kompaktes Selen ohne Metallelektroden für den Kontakt Meßprobe-Kondensatorplatte

<sup>11)</sup> H. Schweickert, Verh. dtsch. physik. Ges. **3**, 99 (1939).

angestellt wurden, gelten für Selenpulver zusätzlich für jeden Kontakt zwischen den einzelnen Pulverkörnern, d. h. der Widerstand des Pulvers liegt weit über dem einer kompakten Selscheibe und für den Verlustwinkel bzw. für  $\varepsilon''$  werden noch wesentlich kleinere Werte gemessen. Ähnliche Betrachtungen wurden von Hahn<sup>12)</sup> an gesintertem ZnO angestellt. Die Gleichstrom- und niederfrequente Wechselstromleitfähigkeit wird durch Schichten geringer Leitfähigkeit zwischen den einzelnen Körnern beeinflusst. Erst oberhalb  $10^6$  Hz werden die Bahneigenschaften mit wesentlich größeren Werten für die Leitfähigkeit gemessen.

Von Meinell sind keine Angaben über den Kontakt im Kondensator und über den spezifischen Widerstand des Sels gemacht worden. Da an Selenpulver gemessen wurde, ist zu vermuten, daß die von ihm gemessenen Maxima des Verlustwinkels ebenfalls durch den Einfluß des Kontaktes erklärt werden können. Die Berechnung von  $\varepsilon''$  ist dann ohne Berücksichtigung der Kontakteigenschaften nicht möglich. Es wäre denkbar, daß neben den Maxima auf Grund der Kontaktimpedanz auch Debyesche Maxima auftreten können. Da aber solche Maxima selbst bei Halbleitern mit Ionenleitung nur sehr schwach sind<sup>13)</sup>, ist anzunehmen, daß sie bei elektronischen Halbleitern mit wesentlich höherer Leitfähigkeit und mit höherem Verlustwinkel völlig verdeckt sind.

#### 3.4 Germanium und Silizium

In Abb. 6 sind die Verlustwinkel für eine Germaniumprobe ( $\rho \sim 25$  Ohm cm) mit aufgedampften Goldelektroden in Abhängigkeit von der Temperatur für die Frequenzen 100 und 400 kHz dargestellt. Diese Germaniumprobe zeigt für keine der beiden Frequenzen Maxima des Verlustwinkels. Messungen nach Temperaturen über  $-70^\circ\text{C}$  sind nicht möglich, da  $\tan \delta$  sehr stark ansteigt und die Meßbrücke nur noch ungenau abgeglichen werden kann.

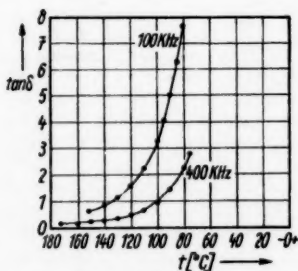


Abb. 6. Verlustwinkel einer Germaniumscheibe bei 100 und 400 kHz Meßfrequenz

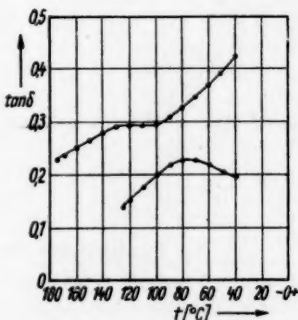


Abb. 7. Verlustwinkel einer Siliziumscheibe

<sup>12)</sup> E. E. Hahn, J. Appl. Phys. **22**, 855. (1951).

<sup>13)</sup> R. G. Breckenridge, J. chem. Physics **16**, 959 (1948); J. chem. Physics **18**, 913 (1950).

Dagegen konnten an einer sehr niederohmigen Siliziumprobe ( $\varrho \sim 0,4 \text{ Ohm cm}$ ) Maxima des Verlustwinkels gemessen werden. In Abb. 7 sind für zwei Kontakte die  $\tan \delta$ -Kurven bei 100-kHz-Meßfrequenz dargestellt. Beide Kontakte (aufgedampfte Metallelektroden) sind sehr hochohmig, aber etwas voneinander verschieden. Für den schlechteren von beiden kann bei 100 kHz noch ein schwaches Maximum des Verlustwinkels festgestellt werden.

Bei sehr niederohmigen Kontakten an der gleichen Siliziumprobe läßt sich selbst bei tiefen Temperaturen ( $t \sim -180^\circ \text{C}$ ) die Meßbrücke nicht mehr abgleichen, der Verlustwinkel ist zu groß. Die reinen dielektrischen Eigenschaften dieses Siliziums können erst bei wesentlich höheren Frequenzen oder wesentlich tieferen Temperaturen gemessen werden.

Berlin-Adlershof, Heinrich-Hertz-Institut.

Bei der Redaktion eingegangen am 12. März 1959.

# Die Heliumlinien unter dem Einfluß senkrecht gekreuzter elektrischer und magnetischer Felder

Von W. Steubing und F. Lebowsky

Mit 4 Abbildungen

## Inhaltsübersicht

Die Aufspaltung der Heliumlinien  $\lambda = 4922, 4471, 4388, 4026$  und  $4143 \cdot 10^{-8}$  cm wird im magnetischen Feld bei gleichzeitiger Einwirkung eines zu diesem senkrecht stehenden elektrischen Feldes untersucht. Die Experimente stellen eine Ergänzung früherer Untersuchungen dar und berücksichtigen besonders den Übergang vom Zeeman- zum kombinierten Effekt. Die Meßergebnisse werden mitgeteilt und diskutiert. Sie lassen folgende Schlüsse zu: Die Anzahl der Komponenten nimmt mit steigender Drehimpulsquantenzahl  $l$  zu, ihre Lage wird sowohl durch die elektrische  $l$ -Verschiebung als auch durch die magnetische  $m$ -Aufspaltung bestimmt, ihre Polarisation ist von  $l$  abhängig. Es existieren  $|Am| > 1$  Übergänge. Die Verschmierung wird durch die hohe Elektronendichte im Feldraum hervorgerufen.

## A. Einleitung

Über den Einfluß senkrecht gekreuzter Felder auf die Heliumlinien liegen bereits experimentelle Untersuchungen vor. Die Versuchsreihen von Steubing und Mitarbeitern<sup>1)</sup> führten zu folgendem Ergebnis.

Im Gegensatz zum reinen Stark-Effekt treten bei der Kombination mit einem zum elektrischen Feld senkrecht stehenden Magnetfeld Zerlegungsphasen auf, die durch kritische Werte voneinander getrennt werden. Entscheidend für diese Phasen ist das Verhältnis von elektrischer zu magnetischer Feldstärke. Ist das Verhältnis der elektrischen Feldstärke  $F$  zu der magnetischen Feldstärke  $H < 1/5$ , so ist der Einfluß des elektrischen Feldes gering, und man beobachtet den normalen Zeeman-Effekt. Zwischen  $1/5 < F/H < 5/4$  treten komplizierte Zerlegungen mit teils scharfen, teils verwachsenen Komponenten auf („additive Phase“). Nach einem scharfen Zerlegungsbild bei  $F/H = 5/4$  (kritischer Wert) werden bei weiterer Vergrößerung des Verhältnisses die Komponenten völlig unscharf und instabil. Dieses Verhalten zeigen alle elektrisch empfindlichen Heliumlinien, wobei das kritische Verhältnis  $F/H$  nur um wenige Prozent differiert. Demgegenüber können Foster und Mitarbeiter<sup>2)</sup> diese Zerlegungsphasen nicht feststellen. Obwohl sie das elektrische Feld auf über 100 kV/cm steigern, so daß

<sup>1)</sup> W. Steubing u. F. Stolpe, Ann. Physik [5] 30, 1, (1937).

<sup>2)</sup> J. S. Foster u. E. R. Pounder, Proc. Roy. Soc. London (A) 189, 287 (1947).

das Verhältnis  $F/H > \frac{1}{4}$  wird, beobachten sie keine Verschmierung der Komponenten. Ihr wesentliches Ergebnis ist der Nachweis des  $|\Delta m| = 2$ -Übergangs bei gekreuzten Feldern.

Die Versuchsanordnungen der oben zitierten Arbeiten sind recht unterschiedlich. Stolpe verwendet ein Entladungsrohr, mit dem der Kanalstrahl senkrecht zum Magnetfeld in den Beobachtungsraum eingeschossen wird. Der Feldraum hat eine Breite von 0,5 mm und eine Höhe von 1,8 mm. Seine Länge beträgt mehrere cm. Zu seiner seitlichen Begrenzung dienen Isolierplättchen. Die elektrische Feldstärke wird von 0 bis 40 kV/cm variiert, das Magnetfeld hat eine Stärke von 26 bzw. 32 kOe. Der Gasdruck liegt bei einigen hundertstel Torr. Demgegenüber benutzt Pounder ein Doppelrohr und schießt von beiden Seiten durch die durchbohrten Polschuhe den Kanalstrahl in den Feldraum ein, der einen Durchmesser von 3,2 mm und eine Höhe von 0,75 mm besitzt. Seine elektrischen Feldstärken sind bis auf eine Ausnahme  $> 40$  kV/cm bei einem Magnetfeld von 25,8 kOe. Der Gasdruck wird mit 0,7 mm angegeben. Offenbar müssen die verschiedenen Beobachtungsergebnisse mit den Versuchsanordnungen zusammenhängen. Die wesentlichsten Unterschiede sind Kanalstrahlanordnung, Gasdruck und Feldraum.

Es soll nun die Aufgabe der vorliegenden Untersuchungen sein, diese verschiedenen Aussagen experimentell zu überprüfen und gleichzeitig bei kleinen elektrischen Feldstärken (Übergang vom Zeeman- zum kombinierten Effekt) die Anzahl, Lage und Polarisation der Komponenten zu ermitteln. Hierfür sind zwei verschiedene Versuchsreihen durchgeführt worden. In der ersten wird ein dem Stolpeschen ähnliches Rohr mit magnetischem Senkrechtfeld verwendet. Es ist in einer vor kurzem erschienenen Arbeit über ähnliche Untersuchungen am Wasserstoff<sup>3)</sup> im Kapitel B III eingehend beschrieben worden. In der zweiten Versuchsreihe wird ein Entladungsrohr benutzt, das entsprechend dem Pounderschen Rohr mit einem magnetischen Parallelfeld arbeitet und ebenfalls in der soeben zitierten Arbeit im Kapitel B IV beschrieben worden ist.

## B. Erste Versuchsanordnung mit magnetischem Senkrechtfeld

Bevor die Ergebnisse dieser Experimente mitgeteilt werden, sei kurz auf die wesentlichen Merkmale der Anordnung hingewiesen. Das Entladungsrohr wird mit Wasserstoff und Helium beschickt, so daß ein Heliumkanalstrahl senkrecht zum Magnetfeld und parallel zum elektrischen Feld in Wasserstoff geschossen werden kann. Der Feldraum besitzt keine Isolierplatten. Es können demnach keine unkontrollierbaren Wandladungen im Beobachtungsraum auftreten. Elektrisches Feld, magnetisches Feld und Beobachtungsrichtung stehen senkrecht aufeinander. Die Daten über Elektromagnet, optische Apparatur und Spannungsquellen sind aus der oben angeführten Arbeit zu entnehmen.

Die Untersuchungen betreffen die Linien  $\lambda = 4922$  und  $4471$ , entsprechend den Übergängen  $4^1Q - 2^1P$  und  $4^3Q - 2^3P$ ,  $Q = D, F$ . Es ist ausschließlich mit Minusfeld gearbeitet worden. Die Linien zeigen bis zu dem Verhältnis  $F/H \approx \frac{1}{4}$  keinerlei Verbreiterungen. Höhere Feldstärken führen zu Funken-

<sup>3)</sup> W. Steubing u. F. Lebowsky, Z. Physik **153**, 64 (1958).

entladungen seitlich der Feldplatte. Die Komponenten sind wie bei Stolpe mit ihren relativen Abständen von der roten Seite aus für die entsprechende Polarisation in  $\text{cm}^{-1}$  angegeben (Tab. 1). Zunächst erscheint nur der  $\Delta l = 1$ -Übergang mit genügender Intensität, die Aufspaltung entspricht etwa der des Zeeman-Effektes. Allerdings liegen die  $p_e$ -Komponenten etwas weiter auseinander und die blaue besitzt größere Intensität als die rote. Erst bei 16,3 kV/cm tritt auch der  $\Delta l = 2$ -Übergang auf, der bei Stolpe schon bei 10 kV/cm gemessen worden ist. Auch gibt Stolpe bei 10 kV/cm drei  $p_e$ -Komponenten an, die sich aber bei höherer Feldstärke bei  $4^1F - 2^1P$  auf zwei reduzieren. Bei dem  $4^3F - 2^3P$ -Übergang tritt hier sowohl für die  $s_e$ - als auch für die  $p_e$ -Polarisation eine Komponente weniger auf.

Ein Blick auf die Meßergebnisse von Pounder, der bei Feldstärken zwischen 70 und 120 kV/cm gearbeitet hat, zeigt eine viel größere Anzahl von Komponenten. Diese stammen zum Teil von der  $4P - 2P$ -Linie und vom  $|\Delta m| = 2$ -Übergang. Das Auftreten neuer Komponenten läßt sich einmal auf die größere Intensität der Interkombinationslinien bei großen elektrischen Feldstärken, zum andern auf die größere Trennung der  $m$ -Niveaus zurückführen.

Tabelle 1  
 $\lambda = 4922$ , Dispersion  $34,6 \text{ cm}^{-1}/\text{mm}$ ,  $H = 27,5 \text{ kOe}$

	$F = 0$		6,5		9,8		16,3 kV/cm	
	$s_e$	$p_e$	$s_e$	$p_e$	$s_e$	$p_e$	$s_e$	$p_e$
$4^1D - 2^1P$	0	0 2,6	0	0 2,8	0	0 2,9	0	0 3,3
$4^1F - 2^1P$	—	—	—	—	—	—	(8,6) 11,6	11,2 15,1

	$F = 22,0$		29,0		35,2 kV/cm	
	$s_e$	$p_e$	$s_e$	$p_e$	$s_e$	$p_e$
$4^1D - 2^1P$	0	0	0	0	0	(-1,3) 0 (0,8)
		3,5		(4,6)	2,93	—
$4^1F - 2^1P$	—	14,3	—	18,6	—	23,2
	14,1	18,4	18,6	22,6	22,2	27,2

$\lambda = 4471$ , Dispersion  $20,8 \text{ cm}^{-1}/\text{mm}$ ,  $H = 27,5 \text{ kOe}$

	$F = 6,5$		22,0		29,0		35,2 kV/cm	
	$s_e$	$p_e$	$s_e$	$p_e$	$s_e$	$p_e$	$s_e$	$p_e$
$4^3D - 2^3P$	0	0 2,8	0	0 3,4	0	0 3,3	0	0 3,4
$4^3F - 2^3P$	—	—	14,6	15,1 19,2	18,2	18,9 23,0	21,1	22,2 26,3

Die Abstände der einzelnen Komponenten decken sich nicht ganz mit den Messungen von Stolpe. Einige stimmen genau überein, andere haben Abweichungen außerhalb der Meßfehler. Auf Grund dieser Meßreihen lassen

sich weder über die Verschmierung noch über die einzelnen Phasen der Zerlegung Aussagen machen. Bei welcher elektrischen Feldstärke die Interkombinationslinien erscheinen, ist offenbar nicht eine Frage der Magnetfeldstärke, sondern der Intensität.

### C. Zweite Versuchsanordnung mit magnetischem Parallelfeld

Die folgenden Versuche dienen dazu, einmal die bei Stolpes Aufnahmen auftretenden Verschmierungen zu klären und zum andern, die absolute Lage möglichst aller Komponenten festzustellen. Es liegt nahe, zunächst die Intensität derart zu steigern, daß schon bei kleiner elektrischer Feldstärke die  $| \Delta m | = 2$ -Übergänge angeregt werden. Denn hier ist die Trennung der  $m$ -Niveaus durch das elektrische Feld bedeutend kleiner als durch das magnetische Feld, wodurch die normale Zeeman-Zerlegung erscheinen sollte. Ein Rohr mit größerer Intensität ist schon bei den Untersuchungen am Wasserstoff entwickelt worden und auch dort eingehend beschrieben. Mit Helium arbeitet es bei einer Brennspannung von 3–5 kV und einem Druck von 0,4–0,2 Torr. Elektromagnet, Optik und elektrische Apparatur sind wiederum dieselben.

Wie die Versuche mit Wasserstoff zeigen, wird das beobachtete Spektrum von dem Vorzeichen der Spannung an der Feldplatte entscheidend beeinflusst. Ein Minus-Feld (negative Spannung an der Feldplatte) zeigt bei senkrecht gekreuztem Magnetfeld die Aufspaltung der Atomlinien des Wasserstoffs, während ein Plus-Feld (positive Spannung an der Feldplatte) zusätzlich das Molekülspektrum erscheinen läßt. Hieraus kann man schließen, daß bei Plus-Feld bedeutend mehr Elektronen im Beobachtungsraum vorhanden sein müssen als beim Minusfeld, da das Molekülspektrum fast ausschließlich durch Elektronenstöße erzeugt wird.

Das Heliummolekülspektrum existiert normalerweise nicht. Daher tritt dieser Unterschied beim Helium nicht so deutlich in Erscheinung. Man beobachtet jedoch einen Farbumschlag von orange-gelb beim Minus-Feld auf blau-grün beim Plus-Feld. Dieses ist die Farbe des negativen Glimmlichtes bei der Helium-Gasentladung. Auch ist die Intensität der Heliumlinien bedeutend größer. Auf diese Erscheinung ist in früheren Versuchen nicht aufmerksam gemacht worden. Der Hinweis bei Stolpe auf die Grünfärbung der Entladung bei Hinzuschalten des Magnetfeldes läßt jedoch auf eine hohe Elektronenkonzentration schließen, obwohl er durchweg mit Minus-Feld gearbeitet hat. Hier zeigt sich die wichtigste Eigenschaft seiner Feldanordnung mit Isolierplatten. Wie weiter unten beschrieben wird, ist bei Kombination der Felder die hohe Konzentration der Ladungsträger eine besondere Eigentümlichkeit, so daß die Stolpesche Beobachtung nicht überrascht. Aber auch die Erscheinung bei dem hier verwendeten Rohr ist verständlich. Da die von Stolpe verwendeten Isolierplatten fehlen, haben die Elektronen nur in der Mitte der Feldplatte einen zum magnetischen Feld senkrechten Bahnverlauf. Beim Minus-Feld können also die Elektronen leicht aus dem Feldraum verschwinden, während das Plus-Feld eine besonders hohe Konzentration bewirkt. Wenn eine Verschmierung der Komponenten durch die hohe Elektronenkonzentration hervorgerufen wird, so muß sie bei Verwendung eines Plus-Feldes nachzuweisen sein.

Bei den Untersuchungen mit Wasserstoff konnte eine Intensitätsänderung in Abhängigkeit der Richtung des Magnetfeldes zum elektrischen Feld festgestellt werden. Demgegenüber bewirkt beim Helium eine Umpolung des Magnetfeldes keinerlei Veränderung des Aufspaltungsbildes. Mithin ist aller Wahrscheinlichkeit nach die Beobachtung am Wasserstoff ein spezifischer Effekt der bewegten Intensität.



Abb. 1.  $\lambda = 4388 \cdot 10^{-8}$  cm,  $H = 32$  kOe,  $F = 13,9$  kV/cm, oben  $s_e$ , unten  $p_e$ , Komponenten

Die folgenden Messungen sind mit Plus-Feld vorgenommen worden. Jede Aufnahme hat als Null-Linie zusätzlich den  $D-P$ -Übergang, auf den sich die Lage der Komponenten bezieht. Die Intensität der Linien nimmt mit steigender Hauptquantenzahl  $n$  stark ab, ihre Unschärfe nimmt zu. Die Verschmierung der Linien ist für die  $n = 5$ -Übergänge schon bei  $13,9$  kV/cm deutlich zu erkennen, während sie sich bei den  $n = 4$ -Übergängen erst bei  $17,5$  kV/cm bemerkbar macht. Der  $n = 6$ -Übergang zeigt bereits schon bei  $10,5$  kV/cm eine beginnende Verschmierung. Die Unschärfe nimmt also proportional der elektrischen Empfindlichkeit zu. Dies kann man auch aus den Komponenten ein und desselben Übergangs ersehen, da selbst bei großen Feldstärken einige Komponenten noch vollkommen scharf sind (Abb. 1 u. 2). Bei Feldstärken kleiner  $6$  kV/cm ist nur der Zeeman-Effekt der  $D-P$ -Übergänge zu beobachten. Der Einsatzzpunkt des Erscheinens der Interkombinationslinien läßt sich nicht mit dem reinen Stark-Effekt vergleichen, da die Anregungsbedingungen völlig andere sind.

Tabelle 2

$\lambda = 4922 \cdot 10^{-8}$  cm $^{-1}$ , Dispersion:  $28,0$  cm $^{-1}$ /mm,  $H = 32$  kOe

Polarisation	$F = 6,9$	10,5	13,9	17,5 kV/cm
$4^1D - 2^1P$ $s_e$	—	(-3,8)	(-4,6)	(-6,3)
$p_e$	-1,6	-2,3	-3,4	-4,3
$s_e$	-0,5 bis +0,8	-0,7 bis +0,6	-1,3 bis 0,0	-2,9 u. 0,3
$p_e$	1,5	1,2	1,0	-0,9 u. +1,7
$s_e$	—	(2,5)	?	—
$4^1F - 2^1P$ $p_e$	3,4	4,0	5,0	5,8
$s_e$	4,8	5,2	5,5	5,7
$p_e$	6,1	6,6	7,1	7,5
$s_e$	7,8	8,3	8,5	8,9
$p_e$	9,4	10,0	10,7	11,6
$4^1P - 2^1P$ $s_e$	?	46,6	46,6	46,8
$p_e$	47,8	47,9	48,4	48,8
$s_e$	?	49,8	49,9	50,1

$\lambda = 4471 \cdot 10^{-8}$  cm, Dispersion:  $25,1$  cm $^{-1}$ /mm,  $H = 32$  kOe

$4^3D - 2^3P$ $p_e$	-1,8	-2,3	-3,0	-4,1
$s_e$	-0,4	-0,8	-1,4 bis -0,3	-2,6 u. -0,6
$p_e$	1,3	1,0	0,7	-1,3 u. +1,0
$4^3F - 2^3P$ $p_e$	4,7	4,9	5,5	(6,5)
$s_e$	6,0	6,0	6,6	7,1
$p_e$	7,4	7,6	7,9	8,8
$s_e$	9,1	9,1	9,7	10,4
$p_e$	10,6	11,0	11,5	12,8

Die Unterscheidung der  $D$ - und  $F$ -Übergänge ist bei diesen beiden Linien ohne Schwierigkeit möglich, da ihre Abstände hinreichend groß sind. Die starke Verbreiterung der mittleren  $D$ -Komponente, besonders bei  $\lambda = 4922$ , ist zum Teil ein Überbelichtungseffekt, kann aber auch durch zwei Komponenten verursacht werden, da eine deutliche Trennung bei  $17,5 \text{ kV/cm}$  beobachtet wird. Bei geringer Intensität tritt diese Trennung nicht merkbar auf.

Die Genauigkeit der Messungen ist durch die Verbreiterung der Linien, die durch Überbelichtung und Starkeffekt hervorgerufen wird, unterschiedlich. Allgemein sind die relativen Abstände der scharfen Linien mit einem Fehler von  $\pm 0,1 \text{ cm}^{-1}$ , die absoluten Wellenzahlen mit einem Fehler von  $\pm 0,5 \text{ cm}^{-1}$  behaftet. Die große Ungenauigkeit der absoluten Messung liegt daran, daß die Vergleichslinie wegen der dichten Lage der Komponenten sich nicht im Spektrum des Aufspaltungsbildes befindet, sondern zwischen den  $p_e$ - und

Tabelle 3  
 $\lambda = 4388 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ , Dispersion:  $24,0 \text{ cm}^{-1}/\text{mm}$ ,  $H = 32 \text{ kOe}$

Polarisation	$F = 6,9$	10,5	13,9	17,5 kV/cm
$5^1D - 2^1P$ $p_e$	-3,6	-6,0	-8,3	-12,0
$s_e$	-1,6	-4,2	-6,3	-9,9
$p_e$	-1,1 (0,5)	-1,8	-3,9	-5,7
$5^1F - 2^1P$ $s_e$	—	-2,5	-3,0	-4,4
$p_e$	0,5 (-1,1)	-1,0	-1,0	-1,7
$s_e$	0,3	0,0	-0,4	-1,6
$p_e$	1,7	1,4	1,3	0,7
$s_e$	3,0	3,4	2,6	1,8
$p_e$	3,9	5,0	5,4	4,8
$s_e$	5,1	?	5,6	5,3
?	$s_e$	6,9	7,8	8,5
$5^1G - 2^1P$ $p_e$	6,4	7,8	9,6	11,1
$s_e$	7,9	9,3	11,4	12,8
$p_e$	9,7	11,7	13,9	(16,5)
$5^1P - 2^1P$ $s_e$	23,2	24,2	25,6	26,8
$p_e$	25,5	26,2	27,9	29,8
$s_e$	26,3	27,2	28,8	30,0

$\lambda = 4026 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ , Dispersion:  $16,8 \text{ cm}^{-1}/\text{mm}$ ,  $H = 32 \text{ kOe}$

$5^3D - 2^3P$ $p_e$	-3,5	-5,8	-7,6	—
$s_e$	-2,0	-4,1	-5,8	-9,1
$p_e$	0,1	-1,8	-3,3	—
$5^3F - 2^3P$ $s_e$	—	-2,7	-2,8	-2,9
$p_e$	-0,8	-0,9	-1,0	-1,2
$s_e$	0,2	-0,2	-0,4	-0,8
$p_e$	2,0	1,5	1,1	0,6
$s_e$	2,9 u. (3,8)	2,9 u. 3,8	(2,9) u. 3,7	2,7 u. 3,5
$p_e$	4,4	5,1 u. 6,1	5,3 u. 6,1	(4,9) u. 5,8
$s_e$	5,2 u. (6,9)	6,2 u. (7,2)	6,3 u. 7,8	—
$5^3G - 2^3P$ $p_e$	6,5	8,1	—	—
$s_e$	8,2	9,5	11,2	(13,8)
$p_e$	(10,5)	(11,5)	—	—

$s_e$ -Komponenten liegt. Die Feldstärken sind auf  $\pm 1,5\%$  genau. Diese Angabe bezieht sich jedoch auf Abstands- und Spannungsmessungen. Auf Grund der oben beschriebenen hohen Elektronenkonzentration kommt aber ein bedeutend größerer unkontrollierbarer Fehler hinzu. Den einzigen Anhaltspunkt hierüber gibt die Größe der Verschmierung der elektrisch empfindlichsten Linien. Der Fehler nimmt mit steigender Feldstärke und steigender Hauptquantenzahl  $n$  stark zu.

Für die  $n = 5$ -Übergänge ist die Unterscheidung der  $l$ -Niveaus nicht ohne Schwierigkeit möglich, weil diese sehr eng beieinander liegen und eine Überlagerung bzw. Störung durch den Zeeman-Effekt auftritt. Die Einteilung ist auf Grund der Schärfe und Lage der Linien vorgenommen worden. Es sei noch erwähnt, daß im Aufspaltungsbild der letzten Linie bei kleiner Feldstärke auch die Linie  $\lambda = 4023 \text{ } 10^{-8} \text{ cm}$ , entsprechend dem Übergang  $7^1S - 2^1P$ , mit dem normalen Zeeman-Effekt erscheint.



Abb. 2.  $\lambda = 4143 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ ,  
 $H = 32 \text{ kOe}$ ,  
 $F = 13,9 \text{ kV/cm}$ ,  
oben  $s_e$ -,  
unten  $p_e$ -  
Komponenten

Für die nächste homologe Linie im Singulettssystem sollen die Komponenten nur der Reihenfolge nach angegeben werden. Eine Einteilung in die entsprechenden  $l$ -Übergänge ist nicht möglich, zumal auch die reine Stark-Effekt-Aufspaltung nicht bekannt ist. Die unscharfen und schwachen Linien sind eingeklammert.

Einige Vergleichsaufnahmen mit Minus-Feld zeigen trotz bedeutend längerer Belichtungszeit weniger Komponenten, sind aber bis  $37,5 \text{ kV/cm}$  relativ scharf. Sie sollen jedoch nicht zur Auswertung herangezogen werden, weil nur die Aufnahmen mit Plus-Feld die schwachen Komponenten enthalten und somit ein vollständigeres Aufspaltungsbild ergeben.

Tabelle 4  
 $\lambda = 4143 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ , Dispersion:  $19,2 \text{ cm}^{-1}/\text{mm}$ ,  $H = 32 \text{ kOe}$

Polarisation	$F = 6,9$		10,5		13,9 kV/cm	
	$s_e$	$p_e$	$s_e$	$p_e$	$s_e$	$p_e$
$6^1Q - 2^1P$	(-6,6)	-7,3	(-9,6)	(-11,8)	(-18,0)	(-15,1)
$Q = D, F, G, (H) P$	-3,8	-4,6	(-5,9)	(-7,4)	(-13,7)	(-9,9)
	-2,6	-1,8	(-4,7)	-4,1	(-7,1)	(-5,6)
	-1,0	(-0,7)	0,0	(-2,3)	-3,7	-1,4
	0,3	0,5	1,2	-0,4	-0,3	-0,1
	1,4	3,2	2,9	(1,2)	2,0	1,6
	3,7	(5,4)	4,9	2,9	2,8	4,1
	5,0	(8,0)	6,5	(7,1)	(4,6)	(8,6)
	(6,4)	16,3	(8,0)	19,0	5,7	(22,4)
	14,1		(9,7)		(8,6)	
	17,1		17,0		(11,0)	
			(20,2)		(22,9)	

#### D. Diskussion der Ergebnisse

##### a) Lage und Polarisation der Komponenten

Die Aufspaltungsbilder der Linien sind, abgesehen von der absoluten Lage der Komponenten, für gleiche Hauptquantenzahlen  $n$  sehr ähnlich. Die Komponenten sind nicht nach ihrer Polarisation getrennt angegeben worden,

sondern ihrer Lage nach aufgeführt. Der Index  $e$  zeigt die Polarisation in bezug auf das elektrische Feld an. Durch die gewählte Anordnung läßt sich folgende Gesetzmäßigkeit ablesen.

Innerhalb der  $l$ -Niveaus wechselt die parallele und senkrechte Polarisation von Komponente zu Komponente mit einigen Ausnahmen, besonders bei höheren Hauptquantenzahlen und größerer Feldstärke. Die Anzahl der Komponenten nimmt mit steigendem  $l$  zu. Der hier nicht angegebene  $S-P$ -Übergang zeigt die drei Komponenten des normalen Zeeman-Effektes, d. h. die  $p_m$ -Komponente, die dem  $\Delta m = 0$ -Übergang entspricht, liegt zwischen den beiden  $s_m$ -Komponenten, entsprechend  $\Delta m = \pm 1$ . Der  $P-P$ -Übergang hat ebenfalls drei Komponenten, bei denen jedoch die  $p_e$ -Komponente von zwei  $s_e$ -Komponenten eingeschlossen wird. Beim  $D-P$ -Übergang ist die Polarisation wieder umgekehrt. Hier treten schon mehr als drei Glieder auf, wenn auch noch mit geringer Intensität. Die  $F-P$ -Übergänge besitzen mindestens fünf Komponenten, wobei die mittlere stets die  $p_e$ -Polarisation besitzt. Für den  $G-P$ -Übergang läßt sich wegen seiner sehr geringen Intensität bei kleinen Feldstärken die Anzahl der Glieder nicht angeben. Auch ist die Bestimmung der mittleren Komponente nicht eindeutig.

Die steigende Anzahl der Komponenten mit steigendem  $l$  läßt sich zwanglos durch die Annahme erklären, daß die  $\Delta m$ -Auswahlregel durchbrochen wird und in Analogie zum reinen Stark-Effekt mit  $|\Delta l| = 0, > 1$  auch  $|\Delta m| > 1$ -Übergänge durch die gekreuzten Felder hervorgerufen werden. Zur Prüfung dieser Annahme sollen die  $F-P$ -Übergänge dienen, wobei für den 2  $P$ -Term die normale Zeeman-Aufspaltung vorausgesetzt wird. Die beiden äußeren Komponenten der fünf Glieder des 4  $F-2 P$ -Übergangs besitzen einen Abstand von  $6,0 \text{ cm}^{-1}$ , den man einer  $\pm 2-0$ -Aufspaltung des normalen Zeemann-Effektes zuordnen kann. Dieser Abstand bleibt bis  $17,5 \text{ kV/cm}$  erhalten, wo die rote Linie lichtschwach und unscharf wird (Abb. 3a u. 3b). Da trotz der Verschiebung dieser Abstand erhalten bleibt, kann man auf ein Niveau schließen. Der Abstand der beiden mittleren Komponenten mit  $3,0 \text{ cm}^{-1}$  bleibt ebenfalls konstant, so daß zusammen mit der Mittelkomponente drei Niveaus vorhanden sind, die sich unabhängig voneinander verschieben. Ordnet man den Niveaus die Quantenzahlen  $m = 0, 1, 2$  zu, erhält man die Übergänge  $m = -2-0, -1-0, 0-0, 1-0, 2-0$  mit  $|\Delta l| = 2$ . Die Annahme eines  $|\Delta m| = 2$ -Überganges gibt also eine einfache Erklärung für den großen Abstand der Außenkomponenten.

Andererseits wäre es denkbar, daß die  $m$ -Niveaus durch die senkrecht gekreuzten Felder völlig veränderte Abstände erhielten. Dem widersprechen jedoch folgende Beobachtungen. Bei einem Feld von  $3,5 \text{ kV/cm}$  liegt der normale Zeeman-Effekt der  $S$ - und  $D$ -Linien vor. Das Vorhandensein des elektrischen Feldes äußert sich lediglich durch eine Verschiebung gegenüber



Abb. 3a.  $F = 13,9 \text{ kV/cm}$



Abb. 3b.  $F = 17,5 \text{ kV/cm}$

$\lambda = 4471 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ ,  $H = 32 \text{ kOe}$ ,  
oben  $s_e$ -, unten  $p_e$ -Komponenten

der Nulllinie. Nahezu das gleiche trifft auch für ein Feld von  $6,9 \text{ kV/cm}$  zu. Wie Vergleichsaufnahmen mit kleinerem Magnetfeld zeigen, verändert sich die Lage der Mittelkomponenten nicht. Es werden nur die relativen Abstände der Komponenten im entsprechenden Verhältnis verkleinert. Die Verschiebung innerhalb der Komponenten erreicht erst bei  $17,5 \text{ kV/cm}$  die Größenordnung der Zeeman-Aufspaltung und entspricht etwa der maximalen Verschiebung des normalen Stark-Effektes. Endlich sei noch auf die oben angegebene einfache Erklärung der Komponentenabstände hingewiesen, die im anderen Fall nicht möglich ist.

Der  $D$ -Übergang läßt sich nicht so einfach übersehen, da offenbar schon die Trennung der  $2-1$  und  $1-1$  von den  $1-0$  und  $0-0$ -Übergängen wegen der größeren Intensität zu beobachten ist. Die Glieder für  $l=1$  zeigen wieder die Zeeman-Aufspaltung des  $m=1$  und des  $m=0$ -Niveaus.

Die  $n=5-n=2$ -Übergänge sind nicht mehr übersichtlich genug, um eine Zuordnung der Komponenten vornehmen zu können. Dies liegt einmal an der geringen  $l$ -Aufspaltung und zum andern an der großen elektrischen Empfindlichkeit. Durch das magnetische Feld unterliegen die  $l$ -Niveaus bei kleinen elektrischen Feldern einer gegenseitigen Störung. Diese scheint sich dahingehend auszuwirken, daß die Zeeman-Abstände verringert werden und erst bei  $10,5 \text{ kV/cm}$  ihre volle Größe erhalten. Die  $D$ -Linien sind bereits bei  $10,5 \text{ kV/cm}$  unscharf und lassen sich daher eindeutig von den  $F$ -Linien trennen. Die Trennung zu den  $G$ -Linien ist bei dem Singulettssystem nicht klar zu erkennen, diese verschmieren erst bei  $13,9 \text{ kV/cm}$ . Die  $F$ -Übergänge zeigen wieder die Mittelkomponente als  $p_e$  polarisiert, daneben folgen die  $s_e$ -Komponenten mit einem Abstand von  $3,0 \text{ cm}^{-1}$ , die nächsten  $p_e$ -Komponenten liegen  $6,0 \text{ cm}^{-1}$  auseinander und die äußersten sehr schwachen  $s_e$ -Komponenten liegen noch beträchtlich weiter entfernt. Es liegt nahe, hieraus den  $|Am|=3$  Übergang zu folgern. Wegen der Schwierigkeit der Zuordnung läßt sich diese Vermutung jedoch nicht nachweisen. Ebenso ist nicht sicher, ob die Mittelkomponente des  $G$ -Übergangs in  $p_e$ -Richtung polarisiert ist. Daher kann über die Polarisation der Übergänge zweierlei ausgesagt werden:

1. Die Polarisation der erlaubten Übergänge richtet sich nach dem magnetischen Feld, während die der Interkombinationslinien dem elektrischen Feld entsprechend auftritt.

2. Die Polarisation richtet sich nach dem Bahndrehimpuls  $l$ , und zwar ist für gerade  $l$  das magnetische und für ungerade  $l$  das elektrische Feld maßgebend.

Von diesen beiden ist die letzte Aussage die wahrscheinlichere. Ist die obige Zuordnung der  $m$ -Niveaus richtig, so weichen ihre Verschiebungen von denen des reinen Stark-Effektes ab, bei dem im allgemeinen die Verschiebung mit steigendem  $m$ -Wert abnimmt. Bei senkrecht gekreuzten Feldern wird bis  $17,5 \text{ kV/cm}$  der  $m=2$ -Term am stärksten verschoben, dann folgt der  $m=0$ -Term und zuletzt der  $m=1$ -Term. Diese Reihenfolge ändert sich bei höheren elektrischen Feldern.

#### b) Verschmierung der Komponenten

Zunächst sei auf einen wichtigen Punkt hingewiesen, nämlich auf die Verteilung der Ladungsträger in kombinierten Feldern. Die Dichte der Ladungsträger, besonders der Elektronen, ist bedeutend größer als im elektrischen

Feld allein. Nähere Untersuchungen hierüber sind von Haef<sup>4)</sup> experimentell und theoretisch durchgeführt worden. Sie beziehen sich auf die Zündspannungen von Gasentladungen unter dem Einfluß eines Magnetfeldes. Hiernach wird durch ein senkrecht zur Entladungsstrecke stehendes Magnetfeld die Zündspannung derart beeinflußt, daß sowohl ein erhöhter als auch ein erniedrigter Zündspannungswert auftreten kann. Die Theorie von Haef<sup>4)</sup> beruht auf der Betrachtung des Bahnverlaufs der Elektronen, die sich in senkrecht gekreuzten, homogenen Feldern auf Zykloiden bewegen.

Für die oben angegebenen Magnetfeldstärken und Gasdrucke wird der Rollkreisdurchmesser der Zykloidenbahn kleiner sein als die freie Weglänge. In diesem Gebiet ist die Ionisierungszahl bei gegebener Gasart unabhängig vom Druck und nur von der Spannung  $U$  und dem Produkt aus der Magnetfeldstärke  $H$  mal dem Elektrodenabstand  $d$  abhängig. Für den Verlauf der Zündkennlinie gibt Haef<sup>4)</sup> zwei erste Lösungen an:

$$U_1 \approx (Hd)^{2/7} 6 \ln(1 + 1/\gamma) \quad \text{und} \quad U_2 \approx (V_i/11,35)^{1/2} H d,$$

wo  $\gamma = \text{const}$  der Ausbeutefaktor der Townsendschen Zünd- und Stationaritätsbedingung und  $V_i$  die Ionisierungsspannung des Gasmoleküls ist. Obwohl diese Theorie die experimentellen Verhältnisse bei den vorliegenden Untersuchungen nicht berücksichtigt, lassen sich doch grundlegende Schlüsse daraus ziehen. Zunächst erkennt man, daß sich das elektrische Feld nicht beliebig steigern läßt, da stets eine selbständige Entladung, auch bei extrem niedrigen Gasdrucken, auftritt. Hierdurch wird die Homogenität des Feldes in Frage gestellt und kann zur Unschärfe und Verschmierung der Linien Anlaß geben. Da die Zündspannung zweideutig ist, entsteht ein Zündgebiet, das unterhalb aber auch oberhalb der Zündkennlinien keine Entladung zuläßt, solange nicht die Spannung so stark vergrößert wird, bis wiederum eine Zündung möglich ist.

Der Ausdruck für  $U_2$  läßt folgende Deutung zu. Nach Stolpes Untersuchungen ist  $F/H$  entscheidend für das Verhalten der Linien. Schreibt man für  $U_2 = Fd$ , so ist für eine bestimmte Gasart  $F/H = \text{const}$ . Hiermit läßt sich also die Beobachtung von Stolpe, daß eine Erhöhung der magnetischen Feldstärke eine Erhöhung der elektrischen Feldstärke zuläßt, bevor die Verschmierung der Linien einsetzt, erklären. Nach dieser Näherung ist die maximale elektrische Feldstärke, die im Feldraum herrschen kann,  $F \approx (24/11)^{1/2} H \approx 1,5 \cdot 26 \cdot 10^3 = 39 \text{ kV/cm}$ . Dieses Ergebnis stimmt mit Stolpes Messungen überein. Hiernach sollte es nicht möglich sein, bei dieser magnetischen Feldstärke höhere Felder ohne selbständige Entladungen zu erhalten. Betrachtet man den zweiten Zündspannungswert  $U_1$ , so erhält man  $F \approx 95 \text{ kV/cm}$ , wenn man  $\ln(1 + 1/\gamma) = 4$  setzt. Innerhalb dieser Feldstärken sollte eine Entladung auftreten. Bei Pounder sind aber bis  $120 \text{ kV/cm}$  alle Linien scharf. Da der Feldstrom von ihm als unmeßbar klein angegeben wird, scheinen keine Entladungen entstanden zu sein.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß ein einfacher Zusammenhang zwischen der Haeferschen Theorie und den beobachteten Ergebnissen nicht

<sup>4)</sup> R. Haef, Acta Phys. Austr. 7, 52 (1953).

besteht. Andererseits gibt sie einen wichtigen Hinweis auf die völlig veränderte Verteilung der Ladungsträger im Feldraum, wenn senkrecht zum elektrischen Feld ein magnetisches Feld vorhanden ist.

Um die Verschmierung bei der vorliegenden Versuchsanordnung klären zu können, sollen die Entladungserscheinungen im Feldraum experimentell untersucht werden. Zu diesem Zweck wird bei einem vorgegebenen Gasdruck die Feldspannung ohne Stabilisierung hochgefahren und beobachtet, bei welcher Spannung  $U_z$  die Zündung erfolgt und wie groß hiernach die Brennspannung  $U_b$  und der Strom  $I_b$  ist.

Tabelle 5  
Plus-Feld ohne Kanalstrahl,  $p = 0,4$  Torr

$H$ in kOe	$U_z$ in kV	$U_b$ in kV	$I_b$ in mA	Bemerkungen zu $I_b$
0	2,2	2,2	?	Funken im Feld
4,5	1,9	$<1,0$	$>1$	kippt unregelmäßig
9,0	1,8	$<1,0$	$>8$	kippt regelmäßig
21,0	1,7	$<1,0$	$\sim 1$	kippt regelmäßig
24,5	1,6	0,6	$\sim 1$	
27,5	0,8	0,7	beliebig	nach Vorwiderstand
32,0	0,8	0,8	beliebig	nach Vorwiderstand

Eine Änderung des Gasdruckes zu kleineren Werten hin führt auf etwas höhere Zünd- und Brennspannungen. Die gleiche Meßreihe mit negativer Spannung an der Feldplatte ruft nur Funkenentladungen hervor, die für  $H = 0$  bei 2,5 kV auftreten. Bei Erhöhen der magnetischen Feldstärke läßt sich die Feldspannung bis auf 3,0 kV steigern. Um den Einfluß des Kanalstrahls auf die Entladungsbedingungen im Feldraum kennenzulernen, sind die folgenden Messungen ausgeführt worden.

Tabelle 6  
Plus-Feld mit Kanalstrahl,  $p = 0,2$  Torr

$H$ in kOe	$U_z$ in kV	$U_b$ in kV	$I_b$ in mA
0	$<1,6$	1,6	0,4
4,5	$<1,2$	1,2	0,4
9,0	$<0,8$	0,8	0,4
15,0	$<0,6$	0,6	0,4
21,0	1,2	1,2	0,4
24,5	$\sim 1,2$	1,6	0,4
27,5	0,8	1,2	0,4
32,0	$<0,8$	0,8	0,4

Diese eigenartige Meßreihe ist dadurch entstanden, daß kein eindeutiger Zündensatz festzustellen ist. Um trotzdem einen Vergleich anstellen zu können, ist der Brennstrom auf einen konstanten Wert eingestellt und die entsprechende Brennspannung abgelesen worden. Die vorgegebene Stromstärke von 0,4 mA zeigt bei allen magnetischen Feldstärken konstante Entladungsbedingungen. Sie hätte für alle  $U_z < U_b$  beliebig gewählt werden können, da  $I_b$  mit  $U_b$  steigt oder fällt. Das abweichende Verhalten zwischen 20 und 28 kOe liegt daran, daß in diesem Feldstärkebereich der Kanalstrahl

nur mit geringer Intensität in den Feldraum gelangt. Bei Minus-Feld setzt die Entladung bei etwa 2 kV für alle Magnetfeldstärken ein, und der Strom nimmt mit wachsender Spannung nur gering zu.

Vergleicht man diese Messungen mit der Verschmierung der Linien, so findet man einen direkten Zusammenhang. Bei Plus-Feld setzt die Verschmierung nicht plötzlich ein, sondern nimmt mit steigender Feldstärke zu, bis die elektrisch empfindlichsten Linien bei 17,5 kV/cm, entsprechend einer Spannung von 0,95 kV, völlig unscharf werden. In diesen Feldstärkebereichen tritt noch keine stabile Entladung mit konstanter Brennspannung auf, sondern der Feldstrom steigt mit der Feldspannung, d. h. die Elektronendichte nimmt zu. Mit hoher Elektronendichte ist aber auch eine starke Polarisierung der Ladungsträger im Feldraum verbunden, die Störfelder erzeugt und dadurch die Verschmierung hervorruft. Bei Minusfeld bleiben die Linien scharf, bis auch wieder die Elektronendichte groß genug wird, um eine Störung der Feldstärke zu bewirken. Bleiben bei hoher elektrischer Feldstärke trotz der gekreuzten Felder die Linien scharf, wie es bei den Versuchen von Pounder der Fall ist, so muß die Dichte der Elektronen im Beobachtungsraum besonders klein sein. Die Verschmierung und Instabilität der Linien ist also ein spezifischer Effekt der gekreuzten Felder, hervorgerufen durch die große Elektronendichte, die das senkrecht zum elektrischen Feld stehende Magnetfeld erzeugt.

### E. Zusammenfassung

Nach Diskussion der früheren Arbeiten über senkrecht gekreuzte Felder beim Helium werden zwei Versuchsreihen durchgeführt, die erste mit magnetischem Senkrecht-, die zweite mit magnetischem Parallelfeld.

Die magnetischen Feldstärken betragen 27,5 bzw. 32,0 kOe. Es wird festgestellt, daß die Verschiebung der  $l$ -Niveaus durch das elektrische Feld nicht wesentlich von dem magnetischen Feld beeinflußt wird.

Die  $m$ -Niveaus zeigen jedoch nach Lage, Polarisierung und Anzahl beträchtliche Unterschiede. Die Anzahl der Komponenten jedes  $l$ -Übergangs nimmt mit steigendem  $l$  und  $n$  zu, wobei eine hinreichende Anregung der Linien mit geringer Intensität vorausgesetzt ist. Das Anwachsen der Komponentenzahl wird auf Übergänge  $|\Delta m| > 1$  zurückgeführt. Für  $n = 4$ ,  $l = 3$  und  $n = 5$ ,  $l = 3$  sind die  $|\Delta m| = 2$ -Übergänge nachzuweisen, die  $|\Delta m| = 3$ -Übergänge sind bei  $n = 5$ ,  $l = 3$  wahrscheinlich. Die Polarisierung der Linien ist von  $l$  abhängig. Für gerade  $l$  entsprechen den  $|\Delta m| = 0, 2$ -Übergängen die senkrecht (parallel), den  $|\Delta m| = 1, 3$ -Übergängen die parallel (senkrecht) zum elektrischen (magnetischen) Feld polarisierten Komponenten. Für ungerade  $l$  ist es umgekehrt. Diese Aussage bedarf aber einer Einschränkung. Auf Grund der nicht genau zu klassifizierenden  $l=4$ -Übergänge ist es auch möglich, daß alle nicht erlaubten  $l$ -Übergänge (Interkombinationslinien) ihre Polarisierung dem elektrischen Feld gemäß einstellen. Die Lage der  $m$ -Niveaus entspricht der Größe des magnetischen Feldes. Ihre Verschiebungen besitzen bei kleinen elektrischen Feldstärken nicht die gleiche Gesetzmäßigkeit wie beim reinen Stark-Effekt. Die Intensität der negativen  $m$ -Niveaus nimmt mit steigender elektrischer Feldstärke ab.

Die Verschmierung der Komponenten ist proportional ihrer elektrischen Empfindlichkeit. Wie an Hand von Gasentladungsuntersuchungen und aus eigenen Messungen hervorgeht, wird sie durch die hohe Elektronendichte im Feldraum hervorgerufen, die das senkrecht zum elektrischen Feld liegende Magnetfeld erzeugt.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft schulden wir Dank für die Bereitstellung der Mittel zur Durchführung dieser Untersuchung und insbesondere für den Elektromagneten und das verwendete Registrierphotometer nach Professor Renninger.

Hamburg, Physikalisches Staatsinstitut.

Bei der Redaktion eingegangen am 13. Februar 1959.

Ein  
bringt  
Für W  
Eigen  
dem c  
Anwen  
diskut  
der D  
Durch

Se  
bekan  
digke  
setzt  
10<sup>5</sup> er  
Theor  
Gleich  
sionsv  
ment  
sucht  
Wert  
Theor  
Druck  
hin k  
noch

1)  
im D  
2)  
15, 2  
3)  
4)  
Physi  
5)  
Arbei

# **Theorie der Diffusionswellen. I** **(Laufende Schichten in Niederdruckentladungen)**

Von H. Rother

Mit 10 Abbildungen

## **Inhaltsübersicht**

Eine allgemeine Theorie der Diffusionswellen wird durchgeführt. Teil I bringt eine erste Theorie der laufenden Schichten in Niederdruckentladungen. Für Wellen kleiner Amplifikation bzw. Dämpfung werden Dispersionskurve, Eigenfrequenz und Rückkopplung abgeleitet in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund. Existenzgrenzen, Amplifikationskriterien und Anwendungen auf die Theorie der Niederdruckentladungen werden in Teil II diskutiert<sup>1)</sup>. Teil III enthält Amplifikations- und Fortpflanzungseigenschaften der Diffusionswellen in Halbleitern, Teil IV in Hochdruckplasmen (elektrischer Durchschlag, Vorstadium).

## **I. Einleitung**

Seit langem<sup>2)</sup> sind Diffusionswellen besonders in Edelgasentladungen bekannt, die sich in Niederdruckentladungen ( $\approx 10^{-1}$ –10 Torr) mit Geschwindigkeiten von etwa  $10^4$  cm/sec (seltener gleichzeitig auftretende entgegengesetzt gerichtete schwache Schichtungswellen<sup>3)</sup> mit Geschwindigkeiten von etwa  $10^5$  cm/sec) von der Anode zur Kathode hin bewegen. Es wurden mehrfach Theorien dieser Erscheinung versucht<sup>4)</sup>, die unter Benutzung von Poisson-Gleichung und Kontinuitätsgleichungen der Träger die Existenz von Diffusionswellen verständlich machten. Ein quantitativer Vergleich mit den experimentellen Werten ergab jedoch bis auf eine kürzlich von Wojaczek<sup>5)</sup> versuchte mehr phänomenologische Theorie, um Größenordnungen zu kleine Werte für die Schichtgeschwindigkeit. Außerdem vermochte keine der Theorien<sup>4)</sup><sup>5)</sup> die Existenz der beobachteten Grenzwerte für Stromstärke und Druck zu erklären, jenseits derer nach höheren bzw. kleineren Stromstärken hin keine selbständige Anfachung von Schichtungswellen mehr stattfindet, noch das Zustandekommen der Rückkopplung und der scharf definierten

<sup>1)</sup> H. Rother, Ann. Physik im Druck; Teil II u. Teil III sowie Teil IV Z. Physik im Druck.

<sup>2)</sup> W. Pupp, Physik. Z. **33**, 844 (1932); **35**, 705 (1934); **36**, 61 (1935); Z. techn. Physik **15**, 257 (1934).

<sup>3)</sup> sog. „Negative Schichten“.

<sup>4)</sup> M. J. Druyvesteyn, Physica **1**, 273 (1934); S. Watanabe u. N. L. Oleson, Physic. Rev. **90**, 1701 (1955).

<sup>5)</sup> K. Wojaczek, Ann. Physik im Druck; die Diskussion einiger Punkte dieser Arbeit gab Anstoß zu den nachstehenden Untersuchungen.

Eigenfrequenz der natürlichen laufenden Schichten. Erst durch kürzlich ausgeführte Messungen an künstlich erregten Schichtungsstellen in der Nähe der Grenzstromstärken — nach hohen Stromstärken (1 A) hin an Argonentladungen<sup>6)</sup> unter gleichzeitiger sorgfältiger Messung von Elektronenbeweglichkeit, Temperatur und Säulengradienten und im Niederstrombereich an Neon- und Argonentladungen<sup>7)</sup>, in denen gerade keine selbständigen Schichten mehr angefacht werden bzw. in denen man die Anfachtung durch geeignete Dämpfung an der Anode unterdrückte — wurde die Aussicht eröffnet, schon im Rahmen einer linearisierten Theorie quantitative Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund zu erhalten. Die Amplifikation bei den natürlich vorkommenden Schichtungsstellen sorgt für so große Amplituden von Elektronentemperatur und Trägerkonzentrationen, daß eine Theorie nach der Methode der kleinen Störungen nicht mehr mit Sicherheit auf quantitativ befriedigende Resultate führen muß. (Die Begrenzung der Amplituden ist bei einem Rückkopplungsfaktor  $> 1$  bekanntlich nur durch wesentlich nicht-lineare Effekte möglich.)

## II. Linearisierte Theorie einer durch Trägerkonzentrations- und Elektronentemperaturschwankungen gestörten positiven Säule

Trägerbilanz, Energiebilanz und Poissongleichung setzen wir in der Form<sup>8)</sup> an:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \operatorname{div} (n_e w_e) = z n_e - \kappa n_e^2 \quad (\text{I})$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \operatorname{div} (n_p w_p) = z n_e - \kappa n_e^2 \quad (\text{II})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( n_e \frac{3}{2} U_e \right) - \operatorname{div} \left( n_e w_e^* \frac{3}{2} U_e \right) = n_e w_e \mathfrak{E} - n_e H_s U_e + n_e H_{II} U_e \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = -4 \pi e (n_e - n_p). \quad (\text{IV})$$

Hierin sind  $n_e$ ,  $n_p$  die Elektronen- bzw. Ionenkonzentration,  $z$  ist die pro sec und  $\text{cm}^3$  von einem Elektron erzeugte Anzahl von Trägerpaaren,  $\kappa$  ist der Koeffizient der Volumenrekombination,  $U_e = \frac{k T_e}{e}$  mit der Elektronentemperatur  $T_e$ ;  $e H_s$  ist die pro sec und  $\text{cm}^3$  einem Elektron durch anregende, ionisierende und elastische Stöße entzogene Energie,  $e H_{II}$  ist die pro Elektron der Volumeneinheit in 1 sec durch Stöße II. Art wieder zugeführte Energie.  $\mathfrak{E}_1 = E$  ist der Gradient der Säule längs der Achse. Um das Gleichungssystem nicht unnötig zu komplizieren, betrachten wir nur zylindrische Niederdruckplasma, in denen  $U_p \ll U_e$  und  $b_p \ll b_e$ .

I–IV läßt sich aufspalten in radialen und axialen Anteil (X-Achse). Die Elektronentemperatur ist in guter Näherung über den Querschnitt des Entladungsrohres konstant.

Eine beliebige radiale Verteilung  $\Delta n_{e,p}$  einer Schwankung der Trägerkonzentration stellt sich, solange die Eckersche (l. c.) Theorie subnormaler

<sup>6)</sup> K. Wojaczek, Ann. Physik, VII, 2, 68 (1958).

<sup>7)</sup> H. Achterberg u. I. Michel, Ann. Physik, VII, 2, 365 (1959), sowie noch unveröffentl. Messungen dieser Autoren.

<sup>8)</sup> Trägheitseffekte infolge der Bewegungsgleichungen (Ionenschall) spielen für die gewöhnlichen „langsamen“ Schichten keine Rolle.

Entladungen noch nicht wirksam wird, mit einer Zeitkonstante  $\frac{1}{\tau_D} = \left(\frac{2,4}{R}\right)^2 b_e U_e$  durch ambipolare Diffusion so ein, daß  $\Delta e_{e,p}(r)$  proportional wird zu  $n_{e,p}(r)$ . Eine mit einer (Gruppen)-Geschwindigkeit von  $10^3$  bis  $10^4$  cm/sec transportierte Erregung entspricht in ihrer radialen Verteilung (bei wenn  $\tau_D \approx 10^{-3}$ – $10^{-4}$  sec) schon nach 1–10 cm Weg der radialen Verteilung der ungestörten Säule, für die in guter Näherung gilt:  $n(r) \sim J_0\left(r \sqrt{\frac{z}{b_e U_e}}\right)$ . (Auch bei Eintritt von Volumenrekombination und Stufenprozessen ist die Abweichung hiervon nur geringfügig<sup>9)</sup>.) Im Rahmen der linearisierten Theorie ist weiterhin  $n_e - n_p \ll n_e$ . Wir können, sofern die Debye-Länge klein ist gegen Rohrradius (und Wellenlänge), deshalb den Trägerverlust durch ambipolare Diffusion ansetzen mit  $n_e \cdot \frac{1}{\tau_D}$ .

Für die axialen Anteile ergibt sich:

$$w_p^1 = w_p = b_p E; \quad w_e^1 = w_e = b_e E + b_e U_e \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} + \left(\delta - \frac{3}{2}\right) b_e \frac{\partial U_e}{\partial x} \quad (1)$$

$$w_e^{*1} = w_e^* = \frac{2}{3} \delta \left[ b_e E + b_e U_e \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} + \left(\delta^* - \frac{3}{2}\right) b_e \frac{\partial U_e}{\partial x} \right] \quad (2)$$

(wegen  $U_p \approx U_{\text{ges}} \ll U_e$  vernachlässigen wir den Ionenanteil der axial temperatur- und konzentrationsbedingten Diffusion).

$\delta$  und  $\delta^*$  sind Zahlenfaktoren von der Größenordnung eins und entsprechen Quotienten der höheren Momente der freien Weglänge ( $\delta \sim A_3/A_1$ ;  $\delta^* \sim A_5/A_3$ , wenn  $b_e \sim A_1$ )<sup>10)</sup>.

### a) Energiebilanz der Elektronen

Als entscheidend für Amplifikation und Dämpfung der aus I–IV resultierenden Diffusionswellen werden sich neben  $H_s$  und  $H_{II}$  erweisen, die hier zunächst eingehender diskutiert werden sollen.

$e H_s U_e$  ist die durch Stöße dem Elektronenensemble in der Zeiteinheit entzogene kinetische Energie.  $H_{II} U_e$  setzt sich zusammen

1. aus den elastischen Stößen  $\frac{m}{M} \mu U_e^\sigma$ , deren Anteil oberhalb 1 Torr stark ansteigt.  $\sigma$  und  $\mu$  hängen vom Verlauf des Stoßquerschnittes ab,

2. den ionisierenden Stößen,  $z_i U_i$  aus dem Grundzustand (mit der Ionisierungsspannung  $U_i$ ),

3. den anregenden Stößen  $\sum_a z_a U_a$  aus dem Grundzustand,

4. der Ionisierung angeregter Atome  $\sum_a \frac{n_a}{n_0} z_{ai} U_a$ : (Stufenionisation)  $z_{ai}$  ist hierbei wie  $z_i$  und  $z_a$  auf die Neutralgasdichte  $n_0$  bezogen;  $n_a$  ist die Konzentration angeregter Atome im  $a$ -ten Anregungszustand,

5. der Anregung angeregter Atome  $\sum_a \frac{n_a}{n_0} \sum_{b>a} z_{ab} U_{ab}$  (Stufenanregung).

<sup>9)</sup> R. Seeliger, Z. Naturforschung **8a**, 74 (1953).

<sup>10)</sup> Vgl. S. Chapman u. T. G. Cowling, Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge 1952.

Die  $z_\nu$  sind den jeweiligen experimentellen Elektronenstoßanregungskurven zu entnehmen. Für die  $z_{\nu\mu}$  sind leider nur sehr wenige experimentelle Daten zugänglich, jedoch ist ihr Einfluß im allgemeinen genähert abzuschätzen.  $e H_{II} U_e$  ist die dem Elektronensemble durch Stöße II. Art<sup>11)</sup> wieder zugeführte kinetische Energie:

$$H_{II} U_e = \sum_a \sum_{b < a} z_{IIab} n_a U_{ab}.$$

Zwischen den Wirkungsquerschnitten  $Q_{IIab} (m/2 v_1^2)$  und den Wirkungsquerschnitten  $Q_{ba} (m/2 v_2^2)$  besteht nach der Quantenmechanik<sup>12)</sup> die einfache Relation  $Q_{IIab} (m/2 v^2) = Q_{ba} (U_{ab} + m/2 v^2)$ . Dieser inverse Prozeß spielt nur bei sehr großen Stromdichten eine Rolle.

Wenn die Querschnitte der unteren Anregungsniveaus für den unelastischen Anteil der Elektronenstreuung Stoßfrequenzen  $\ll 10^{-8}$  sec bedingen

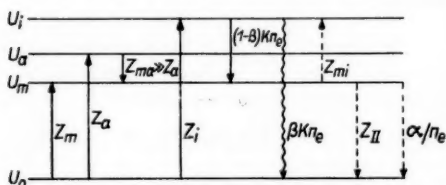


Abb. 1. Reaktionsschema einer Niederdruckentladung in Edelgasen

(im allg.  $10^{-6}$  sec), so genügt es — im Rahmen der Genauigkeit der experimentellen Querschnitte — für die Energiebilanz den Stoffwechsel der untersten Niveaus  $U_m$  summarisch zu behandeln und die  $z_{\mu\nu}$  (nicht-resonante Strahlungsverluste) durch Effektivwerte für Stoßwahrscheinlichkeit und Anregungsspannung zu erfassen.

Für die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Niveaus mit (effektiven!) Lebensdauern  $\gg 10^{-8}$  sec, also Resonanzniveaus und Metastabilen — bei Edelgasen  $2^1S_0$  und  $2^3S_1$  — setzen wir  $\sum n_{m'} = n_m$ .

Mit  $z_m/g_0 = \sum_a z_{m'a'}$ ;  $z_a = \sum_{a'} z_{a'}$  wo  $a'$  über Niveaus mit Lebensdauern  $\approx 10^{-8}$  sec summiert wird und mit den statistischen Gewichten  $g_0$  und  $g_m$  des Grundzustandes bzw. der Terme  $U_m$  (für Edelgase ist  $g_0 = 1$ ,  $g_m = 4$ ) erhalten wir für die Bilanz von  $n_m$  (vgl. Schema der Abb. 1)

$$\frac{dn_m}{dt} = n_e (z_a + z_m) + (1 - \beta) n_e^2 - n_e \frac{n_m g_0}{n_0 g_m} z_m^* - \frac{n_m}{n_0} z_{mi} - n_m q. \quad (3)$$

Hierin ist

$$z_m^* = z_m \frac{U_e \exp(U_m/U_e)}{U_m^{0,5} + \frac{U_e}{U_m}}.$$

$\alpha n m$  gibt die Zahl angeregter Atome, die pro sec aus dem Ensemble  $n_m$  schon ohne Elektronenstoß verschwinden (nichtresonante Abstrahlung z. B. über Molekülbildung, Energieübertragung an Verunreinigungen, Penningeffekt o. ä.).

Für  $\beta$  (im Glied  $(1 - \beta) n_e^2$ ) sollte bei Drucken  $\lesssim 1$  Torr und Stromdichten  $\lesssim 1$  A/cm<sup>2</sup> gelten  $\beta \approx 0$ , da hier alle übrigen Prozesse, die von Strah-

<sup>11)</sup> Vgl. hierzu R. Rompe u. M. Schön, Z. Physik **108**, 265 (1938); ebenda **111**, 345 (1938).

<sup>12)</sup> P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **106**, 581 (1924).

mission begleitet sind, nach den vorliegenden Abklümmungen mit Mikrowellenmethoden<sup>13)</sup> klein sein sollten gegen dissoziative Rekombination.

Die Konzentration angeregter Atome  $n_m$  wird nach (3)

$$\frac{n_m}{n_0} = \frac{z_a + z_m + (1 - \beta) \alpha n_e}{g_0/g_m z_m^* + z_{mi} + \frac{n_0}{n_e} \alpha} \quad (3')$$

Trägerbilanz und Energiebilanz der ungestörten Säule setzen sich dann zusammen aus:

$$Z \equiv z_i + \frac{n_m}{n_0} z_{mi} - \alpha n_e - \frac{1}{\tau_D} = 0 \quad (\text{II}^\circ)$$

$$b_e E^2 = z_i \left( U_i + \frac{3}{2} U_e \right) + z_m U_m + z_a U_a + \frac{n_m}{n_0} z_{im} \left( U_{im} + \frac{3}{2} U_e \right) + \frac{n_m}{n_0} z_{ma} U_{ma} + \frac{m}{M} \mu U_e - \frac{n_m}{n_0} \frac{g_0}{g_m} z_m^* U_m \equiv \tilde{H} U_e \quad (\text{III}^\circ)$$

In III' wurde die direkte Rückheizung durch Volumenrekombination vernachlässigt — bei ausschließlich dissoziativer Rekombination ist sie exakt gleich null<sup>13)</sup>. Aus (I°) und (III°) in Verbindung mit (3') können die beiden experimentell schwerer zugänglichen Koeffizienten näherungsweise bestimmt werden. Damit sind alle in I bis IV eingehenden Größen als bekannt anzusehen.

#### b) Dispersionsgleichung der Wellen

Für nicht zu große Störungen der Säule läßt sich das Gleichungssystem I—IV nach der Methode der kleinen Störungen lösen. Diese Methode erscheint um so brauchbarer, als (besonders für Ne) experimentell nachgewiesen ist<sup>14)</sup>, daß bei Unterdrückung der natürlichen Schichten durch Verminderung der Rückkopplung, also dem Fall kleiner Amplituden, die Frequenz fast unverändert bleibt, und daß der Schichtabstand bei Neon kaum, in Argonentladungen etwas abweicht vom Abstand der natürlichen Schichten unter sonst gleichen Entladungsbedingungen.

Wir ersetzen entsprechend:

$$n_e \text{ durch } n(1 + v), \quad n_e - n_p \text{ durch } nq, \quad U_e \text{ durch } U_e(1 + v). \quad (4)$$

Bei Vernachlässigung quadratischer Glieder in  $v, q$  und  $v$ , wird I—IV gelöst durch:

$$v, q, v \sim e^{i(Kx - \omega t)}. \quad (5)$$

$\omega$  wird positiv gewählt; dann beschreibt (5) für  $k = R_e K$  eine mit Phasengeschwindigkeit  $\frac{\omega}{k}$  von der Anode zur Kathode laufende Welle.

Der Transport der Erregungsenergie erfolgt mit der Gruppengeschwindigkeit  $\frac{\partial \omega}{\partial k}$  — für  $\frac{\partial \omega}{\partial k} > 0$  von der Anode zur Kathode, für  $\frac{\partial \omega}{\partial k} < 0$  von der Kathode zur Anode. Als System von Ausgangsgleichungen wird zweckmäßig Gl. I minus Gl. II, Gl. II; Gl. III minus Gl. I, multipliziert mit  $\frac{3}{2} U_e$  und Gl. IV gewählt.

<sup>13)</sup> Vgl. etwa D. Bates, *Physic. Rev.* **78**, 492 (1950); M. Biondi u. S. Brown, *Physic. Rev.* **76**, 1697 (1949); A. Redfield u. R. Holt, *Physic. Rev.* **82**, 874 (1951) u. a.

<sup>14)</sup> Nach einer freundlichen persönlichen Mitteilung von Dr. Rutscher.

Die rechte Seite von II einschließlich der radialen Diffusionsterme ist nach (II<sup>o</sup>) gleich Z.

Wir setzen weiterhin die rechte Seite von III  $-\frac{3}{2} U_e \cdot \text{II}$ , also  $\tilde{H} U_e - \frac{3}{2} Z U_e = H$ , mit den Ableitungen:

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{n_e}{b_p U_e} \frac{\partial Z}{\partial n_e}; & Z_T &= \frac{1}{b_p} \frac{\partial Z}{\partial U_e} \\ H_n &= \frac{n_e}{b_e U_e} \frac{\partial H}{\partial n_e}; & H_T &= \frac{1}{b_p} \frac{\partial H}{\partial U_e}, \end{aligned} \quad (6)$$

und mit

$$\omega' = \frac{\omega}{b_p U_e}; \quad \varepsilon = \frac{E}{U_e}; \quad \gamma = -\frac{U_e}{b_e} \frac{\partial b_e}{\partial U_e} \quad (15)$$

ergibt die Entwicklung nach  $v, \varrho$  und  $v$  unter Berücksichtigung der Bilanzgleichungen (II<sup>o</sup>) und (III<sup>o</sup>) der ungestörten Säule das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (-i \omega' + 4 \pi e n \frac{b_e}{b_p U_e}) \varrho + (K^2 \frac{b_e}{b_p} - i \gamma K \frac{b_e}{b_p} \varepsilon) v + \\ + (K^2 (\delta - \frac{3}{2}) \frac{b_e}{b_p} + i K \frac{b_e}{b_p} \varepsilon) v = 0 \end{aligned} \quad (I')$$

$$\begin{aligned} \frac{4 \pi e n}{U_e} \varrho + (-i K \varepsilon + i \omega' + Z_n) v + Z_T v = 0 \end{aligned} \quad (II')$$

$$\begin{aligned} -i \frac{8 \pi e n}{U_e K} \varepsilon \varrho + \left[ (\delta - \frac{3}{2}) K^2 - i K \varepsilon + H_n \right] \\ + \left( \frac{3}{2} \left( \frac{2}{3} \delta \delta^* - 2 \delta + \frac{3}{2} \right) K^2 - i K \varepsilon \left( 2 \delta - \frac{3}{2} - \gamma \delta \right) \right. \\ \left. + H_T + \gamma \varepsilon^2 - i \frac{3}{2} \omega' \right) v = 0. \end{aligned} \quad (III')$$

Die Lösungsbedingung für I'–III' ergibt die für alle Erscheinungen von Diffusionswellen fundamentale Dispersionsgleichung:

$$F(K, \omega) \equiv \delta_0 K^4 - i \delta_1 \varepsilon K^3 + (h_2 - i \delta_0 \omega') K^2 + (i \varepsilon a_1 - 2 \varepsilon \omega') K + \varepsilon^2 a_0 - i h_0 \omega' = 0. \quad (7)$$

Mit den wesentlich positiven Koeffizienten

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{2}{3} \delta (\delta^* - \delta); & \delta_1 &= \frac{3}{2} \delta + 1 \\ a_0 &= \frac{4}{3} Z_T - Z_n \left( \frac{H_T}{\varepsilon^2} - \frac{2}{3} \gamma \right) \\ a_1 &= \frac{2}{3} Z_T + 2 Z_n - \frac{4}{3} \gamma - \frac{2}{3} \gamma H_n \end{aligned} \quad (8a)$$

sowie den beiden Koeffizienten  $h_2$  und  $h_0$ , deren Vorzeichen von Entladungsbedingungen, Druck, Stromstärke, Rohrradius und Gasart (Streukurven) abhängen kann.

$$\begin{aligned} h_2 &= \delta_0 Z_n + \left( \frac{2}{3} \delta - 1 \right) H_n - H_T - \left( 2 - \frac{4}{3} \delta \right) \varepsilon^2 \\ h_0 &= \frac{2}{3} H_T - \frac{2}{3} \gamma \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (8b)$$

<sup>15)</sup>  $\gamma$  hängt vom Verlaufe des Elektronenstoßquerschnittes in der Umgebung von  $m/2 v^2 \approx e U_e$  ab und verläuft besonders bei A, K<sub>r</sub> und X<sub>e</sub> anormal.

wir setzen  $K = k + i d$ , dann ist

$$v, \varrho v \sim e^{-dx} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (9)$$

Es sollen nur die Lösungen mit  $\left| \frac{d}{k} \right| \ll 1$  von (7) betrachtet werden. Diese Lösungen erfüllen genähert die (reelle) Dispersionsgleichung:

$$f(k) \equiv \delta_1 \frac{\varepsilon}{\omega'} k^3 + \delta_0 k^2 - \frac{\varepsilon a_1}{\omega'} k + h_0 = 0. \quad (10)$$

Für die Dämpfung  $d$  ergibt sich unter Vernachlässigung höherer Potenzen in  $\frac{d}{k}$ :

$$d = - \frac{g \frac{\partial f}{\partial k}}{\left( \frac{\partial g}{\partial k} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial k} \right)^2}, \quad (11)$$

wobei  $g(k, \omega')$  den Realteil von  $F(k, \omega)$  aus (7) darstellt, mit  $k$  aus (10). Sollen (10) und (11) zur Berechnung starker Amplifikation benutzt werden, so sind die höheren Potenzen zu berücksichtigen und sukzessive einzusetzen (siehe Teil II).

### III. Allgemeine Eigenschaften der Diffusionswellen

Aus (10) und (11) lassen sich schon genähert die wichtigsten Eigenschaften von Diffusionswellen in Plasmen — Dispersion, Wellentypen, Amplifikation bzw. Dämpfung und Rückkopplung — unmittelbar ablesen. In Abb. 2 ist der qualitative Verlauf der Dispersionsgleichung  $f(k)$  nach (11) dargestellt.

Man entnimmt der Darstellung, daß drei Typen von Wellen als Nullstellen von  $f(k)$  möglich sind. Die Lösung  $k_3$  ist physikalisch uninteressant. Sie entspricht — unabhängig von den speziellen Entladungsbedingungen — einer stark gedämpften, von der Kathode zur Anode laufenden langsamen Welle mit sehr kleinem Schichtabstand: nach (10) ist

$$k_3 \approx - \frac{\omega' \delta}{3 \varepsilon} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{6 \varepsilon^2 a_1}{\delta^2 \omega'^2}} \right); \quad d < 0.$$

#### a) „Positive Schichten“

Die Welle  $k_1$  (Abb. 2) entspricht den normalerweise beobachteten laufenden Schichten. Da  $h_0$  klein ist gegen  $\frac{a_0}{\omega'} k$ , hängt  $k_1$  außer von  $\omega$  nur wesentlich ab von der Trägerbilanz der Schottkyschen Theorie und vom Gradienten ( $\varepsilon$ ) der Säule.  $k_1(\omega)$  ist also in weiten Bereichen nur wenig abhängig von der Stromstärke. Für kleine  $\omega$  gilt näherungsweise:

$$k_1 = \sqrt{\frac{a_1}{\delta_1} + \frac{\delta_0^2}{4 \delta_1^2} \frac{\omega'^2}{\varepsilon^2} - \frac{\delta_0}{2 \delta_1} \frac{\omega'}{\varepsilon}} \approx \sqrt{\frac{4}{R^2} \frac{U_i}{U_e} - \frac{4 v_f^2}{(b_p E)^2} - \frac{2 v_f}{b_p E}}^{16}. \quad (12)$$

<sup>16)</sup> Eine exakte analytische Darstellung der Dispersionskurve wird in Teil II<sup>1)</sup> gegeben. Hier ist die Näherung (12) ausreichend mit Werten  $\delta^*$  und  $\delta$  für geschwindigkeitsunabhängigen Stoßquerschnitt.

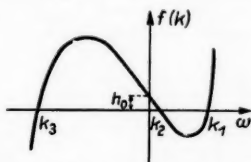


Abb. 2. Imaginärteil  $f(k)$  der Dispersionsgleichung

$k_1$  überschreitet folglich niemals den Maximalwert  $k_{1\max}^{(\omega'=0)} = \sqrt{\frac{2}{3}} a_1$ , d.h. für den Schichtabstand existiert eine untere Grenze, die in diffusionsbestimmten Säulen wegen  $a_1 \sim \frac{1}{R^2}$  proportional mit dem Rohrradius anwächst und zwar ist dann der minimale Schichtabstand:

$$s_{\min} \approx 2\pi R \sqrt{\frac{U_e}{1,5 U_i (1 - \beta R^2)}} \quad (13)$$

$\beta \ll 1$ .

Für große  $\omega'$  bleibt  $k_1$  stets größer als  $\frac{\varepsilon a_1}{2\delta\omega'}$ . Der Minimalwert  $k_{1\min}$  beträgt, wenn  $h_0 > 0$  (Normalfall):  $k_{1\min} = \sqrt{h_0}$ , mit einem oberen Frequenzlimit für die Existenz reeller  $k_1$ -Werte:

$$\omega'_{\max} = \frac{\varepsilon a_1}{2\delta\sqrt{h_0}} = \frac{\varepsilon a_1}{2\delta k_{1\min}}. \quad (14)$$

$d_1$  ist für kleine und große  $k$ -Werte negativ. Der Gang von  $k_1$  mit  $\omega$  ist für eine spezielle in Teil II näher diskutierte Argonentladung<sup>6)</sup> (1 Torr, 2 A, Rohrradius 1,5 cm) in Abb. 3 dargestellt nach Näherung (12), und gestrichelt die Näherung für hohe Frequenzen  $\nu_f \approx \nu_{\max}$ . (12) stellt offenbar schon eine

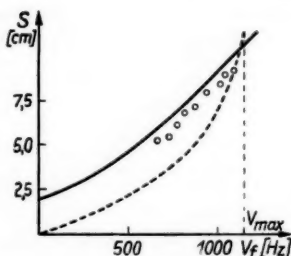


Abb. 3. — Dispersionskurve in Argon (1 Torr, 2 A,  $R = 1,5$  cm);  $\circ \circ \circ$  Experimentelle Punkte nach Wojacek<sup>6)</sup>; --- Kurve berechnet für asymptotischen Verlauf  $s \rightarrow \infty$

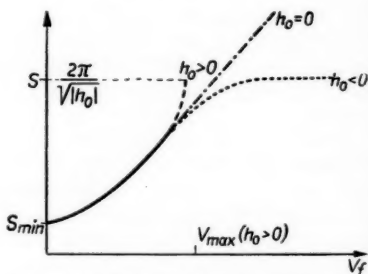


Abb. 4. Allgemeiner Verlauf der Dispersionskurve in „linearer Näherung“. (Veränderung der Kurve durch quadratische Terme in  $d/k$  siehe Teil II<sup>1)</sup>)

sehr brauchbare Näherung dar. In Abb. 4 ist der allgemeine Verlauf für  $h_0 < 0$ ,  $h_0 = 0$  und  $h_0 > 0$  dargestellt. Aus (10) mit (12) und (14) ersieht man, daß  $k_1$  für  $0 < \omega' < \omega'_{\max}$  monoton abnimmt von  $k_{\max} = \sqrt{\frac{1}{\delta_1}} a_1$  bis  $k_{1\min} \geq \frac{\varepsilon a_1}{2\delta\omega'}$ . Es ist also in jedem Falle die Phasengeschwindigkeit  $v_s$  dieser Schichten positiv (von der Anode zur Kathode gerichtet), die Gruppengeschwindigkeit  $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$  negativ. Die Schichten  $k_1$  entsprechen — wie aus Impulsanregungen<sup>17)</sup> wohl bekannt ist — einem Transport von Anregungsenergie

<sup>17)</sup> L. Pekárek, Czechoslov. Journ. Physic 4, 221 (1945).

von der Kathode zur Anode mit einer Geschwindigkeit  $v_g$ . Da  $\frac{\partial \omega}{\partial h}$  von der Frequenz abhängt, können natürlich je nach dem Verlauf von  $d_1$  — bei Existenz zweier Resonanzmaxima s. u. — nach Erregung eines Nadelimpulses an der Kathode auch zwei Wellenpakete mit unterschiedlicher Geschwindigkeit  $v_g$  zur Anode laufen. Maßgebend für die Anfachung natürlicher Schichten ist der Verlauf von  $d_1$ .

Die Lage der Resonanzfrequenzen (Maxima von  $d_1$ ) berechnet sich aus den (reellen) Nullstellen der Gleichung

$$\frac{\partial d_1}{\partial \omega} = 0. \quad (15)$$

Es sind grundsätzlich 2 Fälle möglich.

1. Der Normalfall {Kurven a) und c)}:  $g(k)$  schneidet für  $k > k_{\min}$  die Achse  $g = 0$  nur einmal bei  $k = k_0$ . Dann erreicht  $d$  bei  $\omega_0(k_0)$  sein Maximum. Wenn  $d(\omega_0) > 0$ , so verstärkt sich eine an der Kathode erzeugte Störung auf ihrem Wege zur Anode in einem endlichen Frequenzbereich  $\Delta\omega$  in der Umgebung von  $\omega_0$ . Für  $d(\omega_0) < 0$  klingt jede erzeugte Störung längs ihres Weges ab, d. h. eine Anfachung von Wellen kann nicht mehr stattfinden. Die genaue Lage von  $\omega_0$  kann nur numerisch für die jeweils vorliegenden experimentellen Verhältnisse berechnet werden. In einem schmalen Parameterbereich kann  $g(k)$  dreimal die Achse  $g = 0$  schneiden.  $d$  nimmt also bei zwei verschiedenen Werten  $\omega_0^{(1)}$  und  $\omega_0^{(2)}$  ein Maximum an.

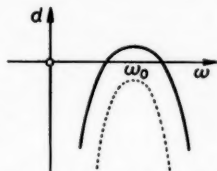


Abb. 5. Resonanzkurve bei einem Maximum von  $d$

Es sollten Entladungen existieren, in denen zwei Systeme laufender Schichten verschiedener Frequenz angefacht werden können.

Ohne äußere Beeinflussung wird im allgemeinen diejenige Schichtfrequenz gemessen werden, zu der der größere  $d$ -Wert gehört. Die Höhe des Maximums hoher Frequenz wächst, wie in Teil II gezeigt werden wird, wegen  $\frac{\omega'}{\omega} \sim P$  mit dem Druck an. Das zweite

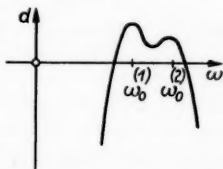


Abb. 6. Resonanzkurve bei drei Nullstellen von  $\frac{\partial d}{\partial \omega}$

Maximum bei kleinen Frequenzen hängt wesentlich nur über den Gradienten  $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{U_e}$  vom Druck ab.

Die Existenz von zwei Resonanzmaxima und der theoretisch zu erwartende Gang des Verstärkungsfaktors mit dem Druck wurde kürzlich experimentell nachgewiesen an Neonentladungen zwischen 4–6 Torr und Stromstärken von einigen mA<sup>18)</sup>. Eine genauere quantitative Analyse dieser Messungen wird in Teil II durchgeführt<sup>19)</sup>.

<sup>18)</sup> H. Achterberg u. I. Michel, Ann. Physik im Druck.

<sup>19)</sup> Auch die von Pekárek<sup>17)</sup> gefundene Koexistenz von Schichtungsimpulsen zweier verschiedener Gruppengeschwindigkeit ist auf selektive Verstärkung in zwei Amplifikationsmaxima  $\omega^{(1)}$  und  $\omega^{(2)}$  (Abb. 6) zurückzuführen.

Abb. 6a gibt den Verlauf von  $d$  wieder für die bereits erwähnte Argon-entladung<sup>6)</sup> [Fall a) von Abb. 5] und qualitativ der Fall b) zweier Resonanzmaxima.

Einen entscheidenden Test für die Brauchbarkeit einer Theorie der laufenden Schichten bilden die von Pupp l. c. gefundenen, allen Edelgasen gemeinsamen Gesetzmäßigkeiten für die Lage der Resonanzfrequenz  $\nu_R$ . Pupp erhielt für He, Ne, A · Kr die universelle Relation:

$$\nu_0 \cdot R \cdot M = \text{const} \frac{U_i}{P \cdot R} \cdot f(P \cdot R). \quad (16)$$

Hierin ist  $R$  = Rohrradius,  $M$  = Atomgewicht,  $U_i$  = Ionisierungsspannung  $p$  = Druck,  $f(P \cdot R)$  eine mit wachsendem  $P \cdot R$  monoton zunehmende Funktion. Ne · A · Kr liegen hierbei auf derselben Kurve, während die Kurve für

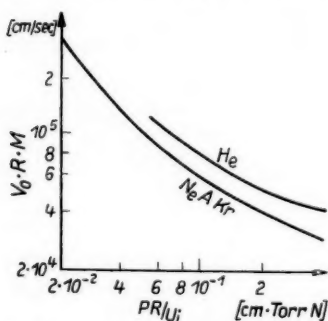


Abb. 7a. Resonanzfrequenz nach Pupp l. c.

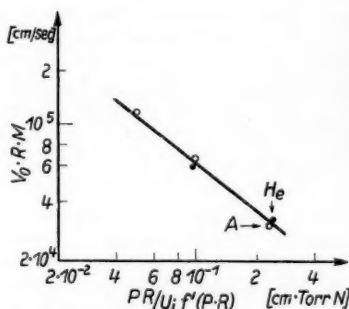


Abb. 7b. Resonanzfrequenz in der Darstellung nach Gl. (20)

He bei doppelt logarithmischer Darstellung etwas dagegen verschoben ist. Wir werden im folgenden zeigen, daß (16) durch unsere Theorie schon in erster Näherung ausgezeichnet wiedergegeben wird und daß sogar die Verschiebung der He-Kurve schon in dieser Näherung quantitativ erfaßt wird.

Wir bemerken zunächst, daß für die gemessene Resonanzfrequenz  $\nu_R$  der natürlichen Schichten  $d_1 > 0$  gelten muß. Folglich muß  $\nu_R$  in der Umgebung des Maximums  $\nu_0$  von (11) liegen. Wir identifizieren näherungsweise  $\nu_R$  mit diesem Maximum, d. h. mit den entsprechenden Nullstellen von (15):  $\nu_R \approx \nu_0$ . Mit (12)

$$k_1 = \sqrt{\frac{a_1}{\delta_1} + \frac{\delta_0^2 \omega'^2}{4 \delta_1^2 \varepsilon^2} - \frac{\delta_0 \omega'}{2 \delta_1 \varepsilon}} \quad (17)$$

entwickeln wir (15) nach Potenzen von  $\omega'$  und erhalten

$$\omega'_0 \approx 2,5 \varepsilon \sqrt{a_1}. \quad (18)$$

In erster Näherung (Schottkysche Theorie) ist  $a_1 \approx \left(\frac{2,4}{R}\right)^2 \frac{U_i}{U_e}$ .

Mit  $\varepsilon = \frac{E}{U_e}$  ( $E$  = Gradient der Säule) wird

$$\nu_0 \approx \sqrt{\frac{U_i b_p E}{U_e R}} \quad (19)$$

(19) entspricht der von Donahue u. Dieke<sup>20)</sup> für Stromstärken zwischen 10 und 200 in Argon bei 12 Torr gefundenen Proportionalität von  $\nu_0$  und  $E$  (wenn  $U_e$  genähert unabhängig ist von der Stromstärke, s. Teil II).

Setzen wir nun  $b_p = \frac{\beta}{M \cdot P}$  und  $E = \frac{\eta \cdot \sqrt{U_i}}{R}$  und entnehmen  $\beta$  und  $\eta$  den experimentellen Daten über diese Entladungen (s. Teil II), so wird mit  $\eta \cdot \frac{\beta}{\sqrt{U_e}} = f(P \cdot R)$

$$\nu_0 \cdot R \cdot M = \frac{U_i}{R \cdot P} \cdot f(R \cdot P). \quad (20)$$

$\nu_0 \cdot R \cdot M$  über  $\frac{P \cdot R}{U_i f(P \cdot R)}$  doppelt-logarithmisch aufgetragen, sollte für alle Edelgase dieselbe Gerade ergeben.

Für Ne, A, Kr ist  $f(P \cdot R)$  fast identisch. Für He liegt  $f(P \cdot R)$  etwa um den Faktor 1,4 höher. Deshalb fällt die Kurve für He in der von Pupp gegebenen Darstellung  $\nu_0 \cdot R \cdot M$  über  $\frac{P \cdot R}{U_i}$  (Abb. 7a) nicht mit den Kurven für Ne, A, Kr zusammen. Die korrigierte Darstellung gibt Abb. 7b.

Die zweite Puppische Relation verifizieren wir durch Einsetzen von (18) in (10). Es wird näherungsweise:

$$k_0 \approx 0,34 \sqrt{a_1} \quad (17')$$

und daraus die zweite Puppische Relation in der Form (wiederum unter Vernachlässigung von Stufenprozessen)

$$\frac{s_0}{R} = 4 \pi \sqrt{\frac{U_e}{U_i}} \approx \varphi \left( P \cdot R \cdot \frac{i}{R} \right) \quad (21)$$

mit dem Schichtabstand  $s_0 = \frac{2 \pi}{k_0}$ .

Die experimentelle, gefundene Abhängigkeit  $\varphi(P \cdot R \cdot i/R)$  in (21) könnte außer der Stromabhängigkeit von  $U_e$  direkt aus dem Anteil der Stufenionisation in der Trägerbilanz ( $\Pi^\circ$ ) abgeleitet werden, jedoch gehen von vornherein in gleichem Maße die bei der Abschätzung von  $k_0$  vernachlässigten Stufenprozesse ein, so daß die Stromabhängigkeit von  $\varphi$  jeweils eine spezielle Betrachtung unter Zugrundelegung zuverlässiger experimenteller Bestimmungsstücke erfordert (siehe Teil II).

Die Frage, ob  $d_1$  in Gl. (11) für die angegebenen Werte  $k_0$  und  $\omega_0$  positiv ist oder negativ, wird in Teil II eingehend diskutiert.

Der Einfluß äußerer Parameter auf den Abstand der Schichten  $s_0$  läßt sich unmittelbar aus (12) ablesen. Wird ein transversales Magnetfeld überlagert, so erhöht sich nach Rechnungen von Beckmann<sup>21)</sup> der Gradient.

Nach (12) sollte hierdurch eine starke Verminderung des Schichtabstandes eintreten. Die hiermit verbundene Verlangsamung der Schichten beim Durchlaufen eines Magnetfeldes wurde experimentell beobachtet<sup>22)</sup> — Abb. 8.

<sup>20)</sup> T. Donahue u. G. H. Dieke, Physic. Rev. **81**, 248 (1951).

<sup>21)</sup> L. Beckmann, Proc. phys. Soc. **90c** London, **61**, 515 (1948).

<sup>22)</sup> A. Rutscher, noch unveröffentl.

Wegen der steilen Zunahme der Dämpfung bei Verlassen des Resonanzmaximums kann ein transversales Magnetfeld ähnlich wie nach (22) eine

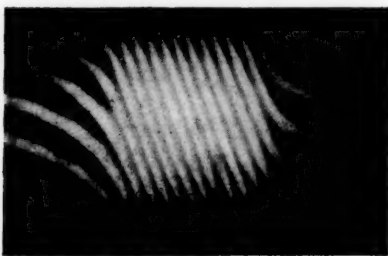


Abb. 8. Einfluß eines transversalen Magnetfeldes auf den Schichtabstand (Drehspiegelaufnahme nach Rutscher l. c.)

Kapillare dazu verwendet werden, die Anfachung natürlicher Schichten zu verhindern.

Ein longitudinales Magnetfeld sollte zu einer Beschleunigung der Schichten (größeres  $s_0$ ) führen. Die experimentelle Bestätigung dieses Effektes steht noch aus.

Es ist nicht überflüssig, den Raumladungsscharakter der „Positiven“-Schichten zu diskutieren. Aus (I') und (II') berechnet man mit  $K_1 = k_1 + i d$  zu einer Temperaturerhöhung  $v = \frac{\Delta U}{U_e}$  eine Raum-

$$\text{ladung } \varrho = \frac{n_v - n_p}{n}$$

$$\varrho = - \left[ 0,8 \left( \frac{2,4}{R} \right)^2 \frac{U_e U_t}{4 \pi e n \epsilon} \right] \cdot d_1 \cdot v. \quad (22)$$

Es sind für den Fall der Amplifikation ( $d > 0$ ) Raumladung und Temperaturerhöhung genähert in Phase (die Trägerkonzentration dagegen ist  $v \sim i v = e^{i\pi/2} v$ ), d. h. es entspricht den Stellen maximaler Temperatur genähert maximale positive Raumladung – daher der Name „positive“ Schichten. (Für

$d < 0$  herrscht an den Stellen maximaler Temperatur nach (22) negative Raumladung.) Auf die kälteren Elektronen aus Gebieten  $v < 0$  wirkt also bei  $d > 0$  auf ihrem Wege zur Anode, während sie in Gebiete höherer Temperatur gelangen zum Feld  $E$  ein zusätzliches  $E$ -paralleles Raumladungsfeld, das sie aufheizt und die Temperatur im Maximum von  $v$  verstärkt; die heißeren Elektronen dagegen werden abgekühlt beim Übergang zu kälteren Bereichen.

(Ist  $d < 0$ , so ist das Feld entgegengesetzt gerichtet und die  $\varrho$ -Gebiete  $v > 0$  werden konvektiv abgekühlt – Dämpfung.) (Abb. 9.)

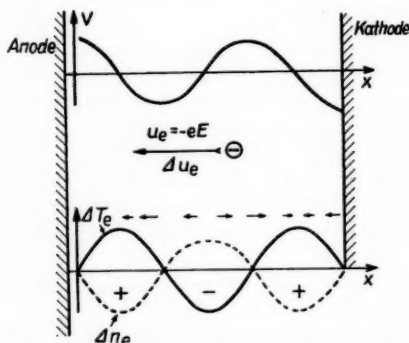


Abb. 9. Trägerkonzentration  $v$ , Elektronentemperatur  $T_e$ , Gradient ( $\rightarrow -$ ) und Raumladung  $An_v$  in einer amplifizierten Welle ( $d > 0$ )

Der (wahrscheinlich fundamentale) Unterschied zum Amplifikationsmechanismus trägerbestimmter Raumladungswellen (Plasmaschwingungen) besteht darin, daß die Aufheizung bei den Diffusionswellen im Gebiet *minimaler* Trägerkonzentration  $v < 0$  stattfindet, während die Beschleunigung

bei den Plasmaschwingungen im Gebiet *maximaler* Konzentration erfolgt. Es wird Wärmemenge dem Gebiet erhöhter Elektronentemperatur zugeführt.

Bei den Diffusionswellen wird mit zunehmender Amplitude immer weniger Wärmemenge amplifiziert, so daß ein Sättigungseffekt längs des Weges einer solchen amplifizierten Welle auftreten sollte. (Eine Sättigung dieser Art wird bei genügend großer Amplifikation und Rohrlänge auch experimentell gefunden<sup>23)</sup>.) Eine genaue Abschätzung dieses Effektes übersteigt aber den Rahmen einer linearisierten Theorie.

### b) „Negative“ Schichten

Für  $h_0 < 0$  haben wir es bei  $k_2$  mit einer amplifizierten Schicht zu tun, die mit hoher Geschwindigkeit  $u \approx \alpha \cdot b_e E$  ( $\alpha > 1$ ) Anregungsenergie amplifiziert von der Kathode zur Anode transportiert [und zwar sind gemäß (23) Phasen und Gruppengeschwindigkeit identisch]<sup>24)</sup>.

Nach (I') und (II') ist  $\varrho \sim d$ , d. h. Temperaturerhöhung und negative Raumladung sind immer in Phase „negative“ Schichten. Schichten dieser Art scheinen in Ar-Entladungen bei  $\approx 10$  Torr aufzutreten.

### c) Rückkopplung

Eine Erregung an der Kathode kann sich, wie in den beiden vorhergehenden Abschnitten gezeigt wurde, amplifiziert zur Anode hin fortpflanzen. Um nun natürliche laufende Schichten stationär anzuregen, muß die Erregungsenergie, multipliziert mit einem Faktor  $\mu \geq 1$ , wieder in Phase zur Kathode rückgekoppelt werden.

Zur genaueren Berechnung dieses Rückkopplungseffektes müssen die Randbedingungen an der Kathode und an der Anode berücksichtigt werden. Zur Vereinfachung betrachten wir den Fall zweier ebener Elektroden<sup>25)</sup> bei  $x = 0$  (Anode) und  $x = l$  (Kathode). Dann gilt die Randbedingung  $\varrho(v) = \varrho(l) = 0$ , für alle Zeiten  $t$ , da jede Raumladung  $n\varrho(x)$  eine entsprechende Influenzladung auf den Elektroden erzeugt, deren Größe genähert durch Spiegelung an den Ebenen  $x = 0$  und  $x = l$  bestimmt ist. Betrachten wir die Lösung  $\varrho_1 = \varrho_1^0 e^{i(K_1 - \omega t)}$ : Die Bedingung  $\varrho_1(0) = \varrho_1(l) \equiv 0$  verletzt natürlich für  $\varrho_1(x) \not\equiv 0$  die Gleichungen (I') bis (III'). Wir müssen eine zweite Lösung überlagern (d. h. die Elektroden erzeugen in der einlaufenden Welle  $\varrho_1$  eine Störung, die dieser Lösung entspricht), der folgende Bedingungen physikalisch auferlegt sind:

Die an der Anode überlagerte Lösung muß eine Gruppengeschwindigkeit von der Anode zur Kathode besitzen; die an der Kathode überlagerte eine solche von der Kathode zur Anode.

<sup>23)</sup> Nach einer freundlichen persönlichen Mitteilung von Dr. Rutscher und Dr. Michel.

<sup>24)</sup> Der Fall ist mit den in dieser Arbeit gemachten Voraussetzungen allerdings nicht realisierbar. Ob er durch nichtberücksichtigte Effekte mitunter möglich ist, ist z. Z. noch ungeklärt.

<sup>25)</sup> Der Einfachheit halber wird auch die Modifizierung der Wellen in den Gebieten zwischen Elektrode und homogener Säule vernachlässigt.

Die Bedingung:

$$\varrho(0) = \varrho(l) \equiv 0 \quad (24)$$

kann an jeder Elektrode nur erfüllt werden durch Addition einer Lösung  $\varrho_a$  zu  $\varrho_1$ , für die  $k_a \sim -k_1$ .

$h_0 > 0$ : Nach (24) erfüllen

$$\begin{aligned} \text{a) } \varrho'(0) &= \varrho_1 \{ e^{-d_1 x} e^{i(k_1 x - \omega t)} - e^{-d_1 x} e^{i(-k_1 - \omega t)} \} \quad \text{an der Anode,} \\ \text{b) } \varrho(l) &= \varrho_1 \{ e^{-d_1 l} e^{i(k_1 l - \omega t)} - e^{d_1 l} e^{-d_3(l-x)} e^{i[-k_3(x-l) + k_1 l - \omega t]} \} \quad (25) \\ &\quad \text{an der Kathode} \end{aligned}$$

die Bedingung (24), wenn die Rohrlänge  $\gg 1/d_4$  und  $1/d_3$  ist.  $\varrho_1$  ist im Rahmen der linearen Theorie die Amplitude, die eine an der Kathode erzeugte Erregung  $\varrho_1 e^{-d_1 l}$  an der Anode erreicht hat. (Bei Sättigung der Amplifikation durch nichtlineare Effekte ist  $d_1$  durch Effektivwerte zu ersetzen.)  $\varrho'(0)$  stellt aber noch nicht die wirkliche Lösung in der Umgebung der Anode dar. Bei Änderung der Stromstärke  $j$  um  $\Delta j$  infolge des Feldes  $E_1$ , das durch  $\partial E_1 / \partial x = -4\pi e n \varrho$  definiert ist, fällt im Vorschaltwiderstand die Spannung

$\Delta U = \Delta j \cdot r$  ab. (Für Sättigungsdiode z. B. gilt  $r \rightarrow \infty$ .) Folglich induziert  $\varrho'(0)$  an der Anode nur eine Stromänderung

$$\Delta j = b_e \left[ E_1(x=0) - \frac{\Delta j \cdot r}{l} \right]. \quad (26)$$

Da wegen der Kontinuitätsgleichung für  $\Delta j$  im äußeren Stromkreis gilt:  $\Delta j(x=0) = \Delta j(x=l)$ , so erzeugt  $\varrho'(0)$  an der Kathode nur eine Stromschwankung:

$$\Delta j = \frac{b_e}{1 + b_e r/l} E_1(x=0) = b_e E_1(x=l). \quad (27)$$

Diese zweite Randbedingung können wir realisieren durch Addition einer Welle  $\varrho_2 e^{-d_2 x} e^{i(k_2 x - \omega t)}$  an der Anode, mit Amplitude  $\varrho_2$  entsprechend (27).

Abb. 10. Änderung der Eigenfrequenz bei Vergrößerung des Elektrodenabstandes einer Niederdruckentladung. — experimentelle Kurve nach Michel u. Achterberg l.c. und theoretische Kurve nach Gl. (28a) (qualitativ); --- zugehörige Resonanzkurve in willkürlichen Einheiten

Die vier Lösungen  $K_1, K_2, K_3, K_4$  reichen genau aus, um die Randbedingungen des Systems zu erfüllen. Die Rückkopplungsbedingungen zur Anfachung natürlicher laufender Schichten lauten damit nach (25) und (27) genähert (unter Vernachlässigung der abklingenden Lösungen  $\varrho_3$  und  $\varrho_4$ :

$$\begin{aligned} \text{a) } k_1 \cdot l &= m \cdot 2\pi \quad (m = \text{ganze Zahl}) \\ \text{b) } \frac{e^{d_1 l}}{1 + b_e \frac{r}{l}} &\geq 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Wenn  $\frac{d_3 + i k_3}{d_4 + i k_4} \neq 1$ , so tritt in (28a) lediglich eine additive Phasenkonstante hinzu.

Die Abhängigkeit der Rückkopplung von  $r$  wurde experimentell von Michel<sup>26)</sup> untersucht. (28) ist natürlich über  $e^{d,l}$  nur so lange von  $l$  abhängig, als keine Sättigung der Amplifikation längs des Weges erreicht ist, d. h. bei genügend großen Rohrlängen wird im allgemeinen die Rückkopplung praktisch unabhängig von  $l$ .

Die Eigenfrequenz  $\nu_R$  der natürlichen Schichten braucht also nicht identisch zu sein mit der Frequenz  $\nu_0$  maximaler Amplifikation, sondern entspricht einer Frequenz, für die (28a) erfüllt ist, liegt aber wegen (11) in der nahen Umgebung von  $\nu_0$ . Ihr genauer Wert hängt aber über die Relation (17) mit (28a) von der Rohrlänge  $l$  ab in Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund (Abb. 9)<sup>26)</sup>.  $\nu_R$  springt auf seinen ursprünglichen Wert  $\nu_0$  zurück, wenn  $l$  die Länge  $\Delta l = \frac{2\pi}{k_0}$  überstrichen hat.

#### d) Nichtlineare Effekte

Wenn die Amplituden von Raumladung und Elektronentemperatur den Größen der ungestörten Säule nahekommen, so sind eine Fülle von komplizierten Effekten zu erwarten. Erwähnenswert ist die aus (17) und (19) folgende Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der lokalen Feldstärke  $E^*$ , die natürlich zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schichten stark variiert. Eine Diskussion nichtlinearer Erscheinungen im Hinblick auf mögliche Amplifikationseffekte in ausgedehnten Plasmen soll Gegenstand späterer Untersuchungen sein.

Herrn Prof. Dr. Rompe danke ich für zahlreiche Diskussionen und wertvolle Hinweise.

<sup>26)</sup> I. Michel, l. c.

Berlin, Physikalisch-Technisches Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 6. März 1959.

## Äußere Feldemission von ZnS-Einkristallen

Von Werner Bertoldi und Christian Kleint

Mit 5 Abbildungen

### Inhaltsübersicht

Es wird über die Feldemission von angespitzten ZnS-Einkristallen bei Dunkelheit und Beleuchtung, bei Bariumbedeckung sowie nach Elektronenbombardement berichtet. Es konnten Ströme bis zu etwa  $2 \cdot 10^{-4}$  A erhalten werden. Die gemessenen Strom-Spannungs-Kennlinien werden diskutiert und mit einer theoretischen Arbeit von R. Stratton über die Feldemission von Halbleitern verglichen.

Über die Feldemission von Halbleitern und Isolatoren ist bisher nur eine geringe Anzahl von Arbeiten erschienen. Apker und Taft<sup>1)</sup> untersuchten die Emission von photoempfindlichen CdS- und CdSe-Kristallen und fanden, daß der Emissionsstrom der beleuchteten Kathode den der unbeleuchteten um mehrere Größenordnungen übertraf. Klimin<sup>2)</sup> gibt zwei Strom-Spannungs-Kennlinien (CdS bzw. CdSe) an, die in der für Feldemission üblichen Darstellung  $\log I$  gegen  $1/U$  ( $I$ : Feldemissionsstrom,  $U$ : Röhrenspannung) Geraden darstellen und fand ebenfalls eine starke Abhängigkeit des Emissionsstromes von der Beleuchtung. D'Asaro<sup>3)</sup> berichtet über Versuche mit dem Feldelektronenmikroskop, bei dem die Kathode aus einem mit Bor dotiertem Silizium-Einkristall bestand. In einer theoretischen Arbeit errechnete R. Stratton<sup>4)</sup> unter vereinfachenden Annahmen die  $I$ - $F$ -Kennlinien ( $F$ : Feldstärke) für Überschuhalleiter; dabei ergab sich, daß der Emissionsstrom von der Temperatur abhängt, solange die Feldstärke am Kristall einen kritischen Wert nicht überschreitet. Eine entscheidende Rolle spielen auf dem Halbleiter vorhandene Oberflächenzustände, die den Emissionsstrom auch bei verhältnismäßig großen Feldstärken temperaturabhängig machen.

### Kristalle

In unseren Versuchen fanden nadelförmige ZnS-Einkristalle Verwendung, die nach dem Frerichsschen Verfahren aus Zink und Schwefelwasserstoff ohne bewußte Aktivierung gezüchtet worden waren. Nach ihrer geometrischen Gestalt ließen sich zwei Sorten unterscheiden. Zur ersten zählten 5 bis 10 mm lange, 0,5 bis 1,0 mm dicke Kristalle mit regelmäßig sechseckigem

<sup>1)</sup> L. Apker u. E. Taft, *Physic. Rev.* **88**, 1037 (1952).

<sup>2)</sup> A. I. Klimin, *ЖТФ* (J. Techn. Phys. [Russ.]) **27**, 719 (1957).

<sup>3)</sup> L. A. D'Asaro, *J. appl. Phys.* **29**, 33 (1958).

<sup>4)</sup> R. Stratton, *Proc. physic. Soc. London* (B) **68**, 746 (1955).

Querschnitt (hexagonales ZnS), bei denen ein Ende durch eine sechseckige Pyramide abgeschlossen wurde. Die zweite Sorte bestand aus 0,01 bis 0,1 mm dicken und bis zu 20 mm langen Kristallen, deren Querschnitt und Ende unregelmäßig geformt waren. Diese Kristalle zeigten große Elastizität und konnten oft fast haarnadelförmig gebogen werden.

Einige Exemplare wurden mit zwei Elektroden (Indium) versehen. Wurden sie unter Zwischenschaltung von Filtern und Linsen mit einer Quecksilber-Hoch- oder Höchstdrucklampe bestrahlt, so übertraf der Photostrom bei Einstrahlung in der Nähe der Absorptionskante den Dunkelstrom um das  $10^3$  bis  $10^4$  fache. Bei einzelnen Kristallen trat Ultrarot-Löschung auf. Bis auf wenige Ausnahmen zeigten die Kristalle in ultravioletterem Licht keine Lumineszenz. Aus Versuchen über die Kontaktierung von ZnS-Kristallen durch Aufschmelzen von Indium kann man schließen, daß mindestens in Kontaktnähe eine Veränderung eintritt, d. h., daß vermutlich Indium eindiffundiert. Es ist demnach wahrscheinlich, daß auch bei der Vorbereitung der Feldemissions-Experimente Indium in die ZnS-Kristalle eindiffundierte.

### Experimentelles

Um eine für Feldemission ausreichende Feldstärke an den Nadelkristallen bei nicht zu hohen Spannungen zu erreichen, mußte das Kristallende künstlich mit einer feinen Spitze versehen werden. Das Anspitzen der Feldkathode geschah durch Auflösen des ZnS in Schwefelsäure oder Königswasser. Beim Eintauchen des Kristalls in die Säure schnürte sich ein zwiebelartiges Gebilde ab, das durch einen dünnen Hals mit dem Kristallschaft verbunden war. Bei vorsichtigem Auflösen dieses Halses konnten sehr feine Spitzen erhalten werden, insbesondere von den regelmäßig geformten Kristallen. Durch Vergleich mit Wolfram-Spitzen, deren Krümmungsradius aus Feldemissions-experimenten bekannt war, konnte durch Beobachtung unter einem hochauflösenden Lichtmikroskop der vordere Krümmungsradius der angespitzten ZnS-Kristalle abgeschätzt werden. Er lag in der Größenordnung von  $10^{-5}$  bis  $10^{-4}$  cm.

Zur Befestigung und Kontaktierung der Kristalle wurden zwei Verfahren benutzt. Einmal bestand die Halterung aus Metall und konnte durch Stromwärme ausgeheizt werden. Die Kontaktierung des Kristalls erfolgte durch Aufdampfen von Gold. Die Möglichkeit einer Feldemission von der metallischen Halterung wird beim zweiten Verfahren ausgeschaltet. Hier war die Halterung völlig aus Glas hergestellt, es kamen keinerlei Metallteile mit dem elektrischen Feld direkt in Berührung. Die Kontaktierung erfolgte durch Aufschmelzen von Indium. Für die meisten Versuche wurde die zweite Halterung benutzt.

Die Feldkathode wurde in das Zentrum einer kugelförmigen Versuchsröhre gebracht. Als Anode diente entweder ein auf das Glas gestrichener und eingebrannter Leitsilber-Ring, der durch aufgestäubten Leuchtstoff mit dem Leuchtschirm in Kontakt war, oder eine heizbare, kreisförmige Drahtschleife aus Wolfram. Letztere konnte nach Umpolen der Röhrenspannung als Glühkathode für den Elektronenbeschuß der Spitze benutzt werden.

Die Vakuumapparatur bestand aus zwei hintereinandergeschalteten Quecksilberdiffusionspumpen; Kühlfalle und Versuchsröhre waren zur Ver-

meidung von Fettdämpfen stets direkt an der letzten Vakuumpumpe angeschmolzen. Nach 24stündigem Evakuieren bei gleichzeitigem Ausheizen bei 400 °C herrschte in der Versuchsröhre ein Druck von weniger als  $10^{-7}$  Torr.

## Ergebnisse

### Strom-Spannungs-Kennlinien ohne Beleuchtung

In Abb. 1 ist die Abhängigkeit des Emissionsstromes einiger ZnS-Kristalle von der an der Röhre liegenden Spannung dargestellt. Ähnliche Kurven wurden von insgesamt 10 Kristallen erhalten. Der bei hohen Spannungen auf-

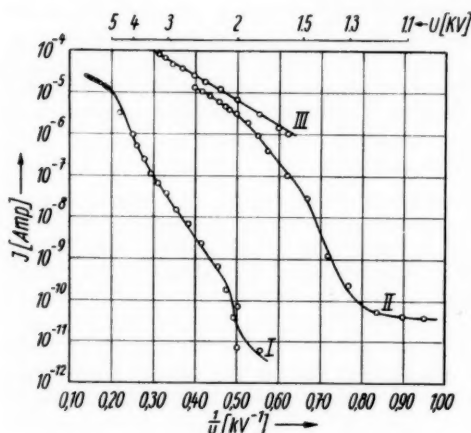


Abb. 1. Dunkelstrom-Spannungskennlinien dreier ZnS-Kristalle

für Halbleiter mit Oberflächenzuständen errechneten Strom-Feldstärke-Kennlinie überein. (Einige Hinweise für die Umrechnung der gemessenen Strom-Spannungs-Kennlinien in Strom-Feldstärke-Kennlinien gehen aus dem Folgenden hervor, der qualitative Verlauf der Kennlinien wird jedenfalls nicht wesentlich beeinflusst.) In Abb. 1 findet sich das anfänglich langsame Anwachsen des Stromes mit der Spannung, das nach Stratton auf den Einfluß von Oberflächenzuständen zurückzuführen ist, die ein Eindringen des elektrischen Feldes in den Halbleiter zunächst verhindern. Mit steigender Feldstärke wird die Potentialschwelle an der Oberfläche erniedrigt, der Strom steigt rasch an; schließlich verschwindet die Potentialschwelle völlig, und das Feld kann ungehindert in den Halbleiter eingreifen. Während bei Metallen die Feldlinien nicht tiefer als etwa  $10^{-8}$  cm eindringen, gelangen sie bei Halbleitern bis zu  $10^{-4}$  cm in das Innere und bewirken an der Oberfläche eine Verbiegung der Bänder. Bei genügend hohen Feldstärken kann die Verbiegung so groß werden, daß der untere Rand des Leitungsbandes unter das Fermi-

treten- geradlinige Teil konnte nicht in allen Fällen beobachtet werden. Sofern die Kathode nicht überlastet wurde, waren die Kurven gut reproduzierbar. Bei erstmaliger Inbetriebnahme einer neuen Feldkathode schwankte der Emissionsstrom beträchtlich, erst nach einer kräftigen Belastung floß ein konstanter Strom. Ob diese Erscheinung durch Formierung des Kontaktes (Alfrey und Cooke<sup>5</sup>) oder durch Veränderung der Spitze hervorgerufen wird, konnte nicht entschieden werden.

Die gefundenen Kennlinien stimmen qualitativ mit einer von Stratton<sup>4</sup>)

<sup>5</sup>) G. F. Alfrey u. I. Cooke, Proc. phys. Soc. London (B) **70**, 1096 (1957).

Niveau gelangt, wodurch sich die Halbleiteroberfläche in bezug auf Elektronenemission wie die eines Metalles verhält. Nach Stratton ist dies bei Zimmertemperatur für Feldstärken  $F - F_0 \gg 1,2 \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot 10^9$  V/cm der Fall ( $F_0$ : Feldstärke, bei der die Oberflächenpotentialschwelle verschwindet;  $\varepsilon$ : Dielektrizitätskonstante). Mit  $\varepsilon = 8,0$  für ZnS ergibt sich als Bedingung für die Feldstärke  $F - F_0 \gg 3,4 \cdot 10^9$  V/cm, d. h. ein Wert, der mit unseren Spitzen durchaus erzielt werden konnte. Diesem Verhalten dürfte in den Kennlinien der obere, weniger steile, gerade Teil entsprechen. Prinzipiell ist es möglich, aus dem Anstieg dieser Geraden auf die potentielle Energie der Elektronen im Leitungsband (Höhe der Potentialschwelle über dem unteren Rand des Leitungsbandes) zu schließen, woraus bei Kenntnis der Lage des Fermi-Niveaus die Austrittsarbeit berechnet werden kann. Es wurden Berechnungen durchgeführt, die aber unter den gegebenen Versuchsbedingungen zu ungenauen Resultate lieferten. Es sei noch darauf hingewiesen, daß der Anstieg dieses Geradenstückes der verschiedenen Kennlinien fast gleich war.

#### Strom-Spannungs-Kennlinien bei Beleuchtung

Um den Einfluß der Beleuchtung auf die Emission zu untersuchen, wurden die Feldkathoden in der bereits erwähnten Weise bestrahlt. Es zeigte sich, daß in fast allen Fällen (5mal, die restlichen 4 Kristalle hatten keine Photoempfindlichkeit) nur bei kleinen Spannungen die Emissionsströme von beleuchteter und unbeleuchteter Kathode voneinander verschieden waren, bei größeren Spannungen jedoch jeglicher Unterschied verschwand. In Abb. 2 sind die Kennlinien einiger Kristalle dargestellt. (Bei der Kurvenschar I wurde auf eine Messung mit noch höheren Spannungen verzichtet, um die Spitze durch das bei  $5 \mu\text{A}$  Emissionsstrom beginnende Glühen [siehe unten] nicht zu verändern).

Da bei sehr hohen Feldstärken der Emissionsstrom nach der Strattonschen Theorie nicht mehr von der Ladungsträgerkonzentration abhängt, kann das beobachtete Verhalten zumindest bei höheren Spannungen erklärt werden. Die durch Lichteinstrahlung erhöhte Trägerkonzentration kann dann nur zu einer Verminderung des Bahnwiderstandes der Feldkathode führen. Im mittleren Teil der Kennlinien sollte jedoch der Emissionsstrom von der Trägerkonzentration abhängen. Eine Möglichkeit, die hiervon abweichenden Meßwerte zu deuten, ergibt sich, wenn man die Versuchsergebnisse von Böer

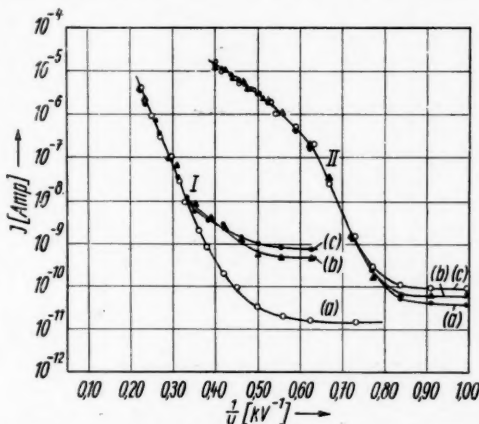


Abb. 2. Strom-Spannungskennlinien zweier ZnS-Kristalle. Kurven (a): Emissionsstrom der unbeleuchteten Feldkathode. Kurven (b) und (c): Emissionsstrom der mit UV-Licht verschiedener Wellenlänge beleuchteten Kathode

und Kümmel<sup>6)</sup> an CdS-Einkristallen heranzieht. Bei der Untersuchung von Elektrolumineszenzerscheinungen in starken elektrischen Gleichfeldern fanden die genannten Autoren, daß bei großen Feldstärken die Leitfähigkeit des Materials infolge elektrischer Anregung stark anstieg und daß ein Kristall, der anfangs stark photoempfindlich war, im elektrisch erregten Zustand nur noch bei außerordentlich intensiver Beleuchtung eine weitere Leitfähigkeits-erhöhung zeigt. Auch von Woods<sup>7)</sup> werden (teilweise irreversible) Leitfähigkeits-erhöhungen an CdS-Kristallen nach Durchgang großer Ströme beschrieben (stabilisierte Durchschlagsprozesse), wobei sich die Leitfähigkeit um mehrere Größenordnungen ändern kann.

Überträgt man diese Ergebnisse auf die dem CdS ähnlichen ZnS-Kristalle, so würde das bedeuten, daß bei kleineren Feldstärken ein großer Teil (beleuchtungsabhängig) der an die Röhre gelegten Spannung am Bahnwiderstand der Kathode abfällt. Reicht dieser Spannungsabfall nicht aus, den Kristall elektrisch zu erregen, so werden die Emissionsströme von beleuchteter und unbeleuchteter Kathode infolge der ungleichen Kathodenwiderstände und der Konzentrationsabhängigkeit der Emission unterschiedlich groß sein. Bei Erhöhung der Spannung erreicht der Spannungsabfall im Kristall schließlich einen Wert, bei dem elektrische Anregung (Erhöhung der Ladungsträgerkonzentration) auftritt. Die Leitfähigkeit des Kristalls steigt stark an, ein beträchtlicher Teil der Spannung liegt nun zusätzlich zwischen Spitze und Anode und führt zu einem starken Anwachsen der Emission, wobei die Beleuchtung keinen wesentlichen Einfluß mehr auf die Größe des Stromes hat.

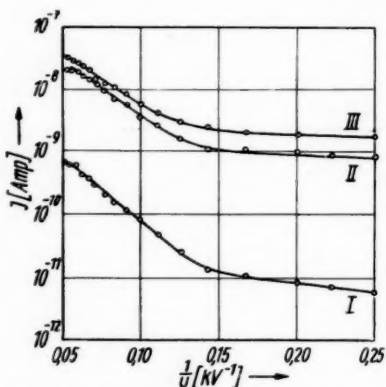


Abb. 3. Abhängigkeit des Emissionsstromes von der Beleuchtung bei einem ZnS-Kristall. Kurve I: Emissionsstrom der unbeleuchteten Kathode. Kurve II: Emissionsstrom der beleuchteten Kathode (Wellenlänge 365 mμ). Kurve III: wie Kurve II, vierfache Lichtintensität

Die Ergebnisse eines anderen Versuches unterscheiden sich von den eben beschriebenen dadurch, daß die gesamte  $I-U$ -Kennlinie bei Beleuchtung der Kathode fast parallel nach oben verschoben wurde. (Ein entsprechendes Verhalten dürfte bei Klimin<sup>2)</sup> stets vorgelegen haben.) Abb. 3 zeigt, daß der Emissionsstrom vom beleuchteten Kristall den Dunkelstrom um das etwa

<sup>6)</sup> K. W. Böer u. U. Kümmel, Z. physik. Chem. **200**, 193 (1952).

<sup>7)</sup> J. Woods, Proc. phys. Soc. London (B) **69**, 975 (1956).

150fache übertraf und mit der Vergrößerung der Beleuchtungsintensität zunahm. Es ist zu vermuten, daß der Kristall eine vergleichsweise große Leitfähigkeit aufwies, worauf auch die Tatsache hindeutet, daß er als einziger untersuchter Kristall bei Beleuchtung mit UV-Licht lumineszierte. Da hier eine elektrische Anregung unwahrscheinlich ist, sollte ein solcher Kristall die starke Konzentrationsabhängigkeit des Emissionsstromes im unteren und mittleren Kennlinienteil zeigen, der obere Teil entzog sich offenbar der Beobachtung. Abb. 4 zeigt zum Vergleich einen CdS-Kristall mit entsprechendem Verhalten. Hier ist auch das Zusammenlaufen der Kennlinien bei hohen Feldstärken erkennbar.

#### **Elektronenbeschuß der Feldkathode**

In einigen Versuchen wurde die Wirkung des Elektronenbeschusses auf die Feldkathode untersucht. Nach dem Bombardement ergab sich regelmäßig eine geringfügige Erhöhung des Emissionsstromes (Abb. 4). Vermutlich wurde die Kathodenoberfläche aufgeraut und die lokalen Feldstärkeerhöhungen bewirkten einen höheren Strom.

#### **Glüherscheinungen an den Feldkathoden**

Sehr große Emissionsströme bewirkten, daß in einigen Fällen die Kristallspitze zu glühen begann. Durch weitere Erhöhung der Spannung konnte sogar ein Teil des Kristalls zum Glühen gebracht werden. Die hierzu notwendigen Emissionsströme hingen von der Dicke der Feldkathoden ab. So glühte bei einem Kristall vom Durchmesser  $3 \cdot 10^{-3}$  cm weit über die Hälfte durch einen Emissionsstrom von  $40 \mu\text{A}$ , während für einen zehnmal so dicken über  $200 \mu\text{A}$  erforderlich waren.

Diese Beobachtungen zeigen, daß auch bei großen Feldstärken noch ein gewisser Teil der an die Röhre gelegten Spannung in der Kathode abfällt. Da die durch Strahlung und Wärmeleitung in der Zeiteinheit abgegebene Energie und das Produkt aus Emissionsstrom und Spannungsabfall gleich sein müssen, erhält man für letzteren einen Wert von ungefähr 200 V, wenn

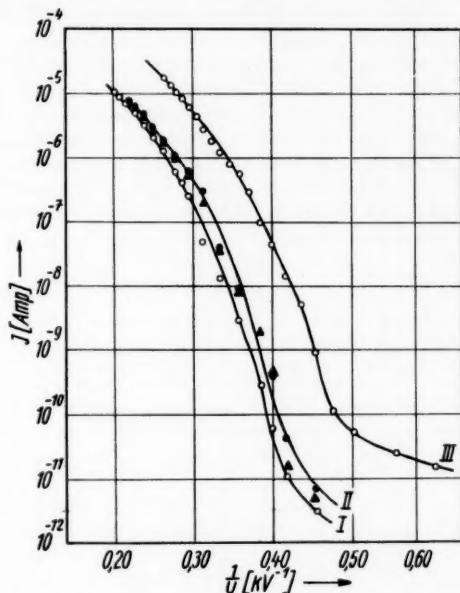


Abb. 4. Strom-Spannungskennlinie eines CdS-Kristalles. Kurve I: unbeleuchtete Kathode. Kurve II: beleuchtete Kathode. Kurve III: Emissionsstrom der unbeleuchteten Kathode nach dem Elektronenbombardement der Spitze

man aus dem Versuch bestimmte bzw. geschätzte Werte einsetzt. Hieraus ergibt sich der Bahnwiderstand der  $3 \cdot 10^{-3}$  cm dicken und ca. 2 mm langen Feldkathode zu  $5 \cdot 10^6$  Ohm.

Durch starkes Glühen verrundete die Kristallspitze, denn zur Erzeugung des gleichen Emissionsstromes war nach dem Glühen eine größere Spannung notwendig als vorher. Zu große Ströme zerstörten den Kristall. Oft ging die Zerstörung explosionsartig vonstatten, auch bei solchen Kristallen, welche einen sehr geringen Emissionsstrom lieferten, der die Spitze nicht zum Glühen brachte und auch keine wesentliche Erwärmung ergeben konnte. Die Ursache der Zerstörung war wahrscheinlich ein Felddurchschlageffekt, da die erforderlichen Spannungen stets sehr groß waren (mehr als 10 kV). In manchen Fällen ist der Kristall wahrscheinlich durch die große Feldkraft abgerissen worden.

#### Feldkathoden mit adsorbiertem Barium

In Abb. 5 sind Kennlinien eines Kristalls dargestellt, der mit Barium bedampft wurde. Kurve I stellt die Strom-Spannungs-Kennlinie des sauberen Kristalls dar, dessen Spitze bei etwa  $100 \mu\text{A}$  Emissionsstrom zu glühen begann.

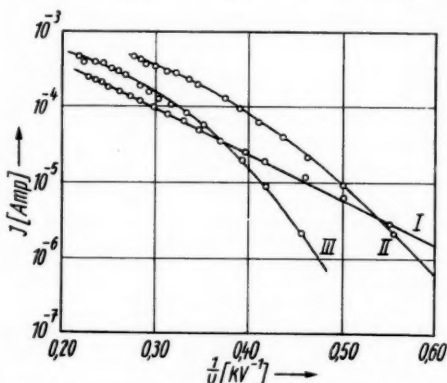


Abb. 5. Emissionsstrom der mit Barium bedampften Feldkathode. Kurve I: Emissionsstrom der sauberen Kathode. Kurve II: Emissionsstrom nach dem Aufdampfen von Barium. Kurve III: Emissionsstrom der Feldkathode, von der ein Teil des aufgedampften Bariums durch Ausglühen der Halterung entfernt worden ist

Feldstärken der Emissionsstrom von der bedampften Barium-Spitze trotzdem kleiner ist als der von der unbedampften, läßt sich die Form der Kennlinie nicht allein auf Grund von Widerstandsänderungen der Kathode erklären. Vielmehr verhindert die Kathodenoberfläche ein Eindringen des Feldes in den Kristall und führt nach Stratton zu einem geringeren Emissionsstrom. Erst bei größeren Feldstärken ergibt sich wegen des verminderten Bahnwiderstandes ein höherer Strom.

Nach dem Aufdampfen von Barium wurde Kurve II aufgenommen, sie ist im Gegensatz zu Kurve I gekrümmt, ein Glühen des Kristalls konnte auch bei  $500 \mu\text{A}$  nicht beobachtet werden. Nachdem ein Teil des Bariums durch Ausheizen der Halterung entfernt worden war, wurde Kurve III gemessen. Hier begann die Spitze bei  $200 \mu\text{A}$  Emissionsstrom zu glühen.

Die unterschiedlich großen Ströme, die das Glühen des Kristalls hervorriefen, zeigen, daß der Stromtransport zum überwiegenden Teil in der dünnen Ba-Schicht hohen Leitvermögens an der Oberfläche erfolgte und daß demzufolge der Bahnwiderstand stark herabgesetzt war. Da bei kleinen

Da  
mäßige  
Leben  
darin,  
der et  
entspr  
Das „  
spitze  
Oberfl  
an Ecl  
sichtb  
vorge  
mikro  
das G

Es  
Spann  
rückz  
Glühe  
bei u  
theore  
ist gu  
Feldst  
der F  
arbeit  
U  
gegeb

F  
beson

### Abbildung der emittierenden Fläche (Feldelektronen-Mikroskop)

Das auf dem Leuchtschirm sichtbare „Bild“ der Spitze stellt eine unregelmäßige Anhäufung heller, verschieden geformter Flecke dar, die eine begrenzte Lebensdauer hatten. Die einzige Symmetrieeigenschaft des Bildes bestand darin, daß sich die Flecke um einen Punkt auf dem Leuchtschirm gruppierten, der etwa dem Durchstoßpunkt des verlängerten Kristalls durch die Röhre entsprach. Auch das Glühen der Spitze veränderte das Bild nicht wesentlich. Das „Bild“ der Spitze erinnert stark an das einer frisch geätzten Wolframspitze, die noch nicht genügend geglüht wurde, so daß keine Verrundung durch Oberflächenwanderung einsetzen konnte. Infolge der bevorzugten Emission an Ecken und Kanten (großer Grob—Fein-Faktor) sind die Kristallflächen nicht sichtbar. Die gleiche Situation dürfte bei den untersuchten ZnS-Feldkathoden vorgelegen haben. Es ist demnach zu vermuten, daß die Emission von submikroskopischen Unregelmäßigkeiten der Kathoden ausging, die auch durch das Glühen der Spitze nicht beseitigt werden konnten.

### Schluß

Es darf als einwandfrei gesichert gelten, daß die beobachteten Strom-Spannungs-Kennlinien allein auf die Feldemission der ZnS-Einkristalle zurückzuführen sind. Dafür sprechen neben der Form der Kennlinien auch das Glühen der Spitze und die Beleuchtungsabhängigkeit, sowie Kontrollversuche bei umgepolter Röhrenspannung. Die qualitative Übereinstimmung mit dem theoretischen Verlauf der Kennlinien von Halbleiterkathoden nach Stratton ist gut. Ein quantitativer Vergleich stößt wegen der Unkenntnis der Grob-Feldstärke an der Spitze (Spitzenradius und -form), des Grob—Fein-Faktors der Feldstärke, des Felddefizits<sup>1)</sup>, der Oberflächenzustände und der Austrittsarbeit auf sehr große Schwierigkeiten.

Über weitere Untersuchungen der Feldemission von Halbleitern wird zu gegebener Zeit berichtet werden.

Für wertvolle Diskussionen sind wir Herrn Professor Dr. G. Hertz zu besonderem Dank verpflichtet.

Leipzig, Physikalisches Institut der Karl-Marx-Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 5. März 1959.

# Die Verteilungstemperatur von Rußflammen

Von Fritz Rößler

Mit 9 Abbildungen

## Inhaltsübersicht

Eine eingehende Diskussion der an der Amylacetatflamme vorliegenden Messungen führt zu der Folgerung, daß die Farb- (genauer Verteilungs-) Temperatur einer solchen Flamme bereits im sichtbaren Bereich nennenswert von der Wellenlänge abhängig ist. Berücksichtigt man die Wellenlänge, bei der die Messung der Farbtemperatur vorgenommen wurde, so läßt sich die wahre Temperatur einwandfrei bestimmen. Diese Auswertung beseitigt die zwischen den Messungen von Valentiner und Rössiger einerseits und von Pearson und Pleacance andererseits bestehende Diskrepanz. Eine solche Auswertung ist auch für andere Rußflammen als die Amylacetatflamme möglich. Mittlere Zahlenwerte werden angegeben und Nomogramme für die Temperaturbestimmung aufgestellt.

## A. Einleitung

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> war die Farbtemperatur einer durch Rußteilchen leuchtenden Flamme berechnet worden. Wie wir später sehen werden, führen die so berechneten Ausdrücke für die Farbtemperatur bei dünnen Flammen zu Widersprüchen, die darauf hindeuten, daß die in dieser früheren Arbeit benutzte Näherung noch nicht ausreichend ist. Im besonderen ist der sichtbare Bereich zu klein, um genauere Gesetzmäßigkeiten ableiten zu können. Es wurden daher die Rechnungen bis ins ultrarote Gebiet hinein fortgesetzt, das auch für die Abstrahlung der Flamme besonders wichtig ist. Als hauptsächlichste Grundlage für die Rechnung muß zunächst der Absorptionskoeffizient der in der Flamme vorhandenen kolloidalen Rußteilchen bestimmt werden. Daraus wird dann die Größe der Farb-(genauer Verteilungs-)Temperatur abgeleitet und es werden weitere Folgerungen gezogen.

## B. Absorptionskoeffizient

Im folgenden werden also ausschließlich Flammen behandelt, die durch Rußteilchen leuchten. Für die praktische Durchrechnung werde ich mich auf die Amylacetatflamme beschränken. Diese hat den Vorteil, daß sie sehr definiert ist und an ihr eine große Anzahl ausgeführter Messungen vorliegen. Diese Daten setze ich als bekannt voraus und versuche die Gesetzmäßigkeit für die Farbtemperatur abzuleiten.

<sup>1)</sup> F. Rößler, Z. angew. Physik 2, 161 (1950).

Nun hat kolloidaler Ruß glücklicherweise die Eigenschaft, daß die echte Absorption bei ihm gegenüber der Streuung stark überwiegt<sup>3)</sup>. Das hat zur Folge, daß das Beersche Gesetz gültig ist, was Ångström<sup>3)</sup> an Ruß und Becker<sup>4)</sup> an der Flamme zeigen konnten. Das Absorptionsvermögen  $a_\lambda$  wird also, wie für jede rein absorbierende Substanz:

$$a_\lambda = 1 - e^{-\kappa_\lambda \cdot l}; \quad (1)$$

$l$  bedeutet dabei die Schichtdicke und  $\kappa_\lambda$  den Absorptionskoeffizienten für die Einheits-Schichtdicke.  $\kappa_\lambda$  ist von der Wellenlänge stark abhängig, was durch den Index  $\lambda$  angedeutet sei. Eine mittlere, feste Wellenlänge  $\lambda_m$  sei als Bezugswellenlänge gewählt. Das für  $\lambda_m$  geltende Produkt (2)

$$\kappa_{\lambda_m} \cdot l = D^5) \quad (2)$$

sei als optische Dicke bezeichnet. Becker<sup>4)</sup> konnte nun weiter zeigen, daß die Wellenlängenabhängigkeit des Absorptionsvermögens durch  $\lambda^{-n}$  mit einem konstanten  $n \sim 1$  dargestellt werden kann<sup>5)</sup>.

$$\kappa_\lambda \cdot l = \kappa_{\lambda_m} \cdot l \cdot \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^n = D \cdot \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^n, \quad (3)$$

$$a = 1 - e^{-D \cdot \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^n}, \quad (4)$$

$$\ln \kappa_\lambda \cdot l = \ln \ln \left( \frac{1}{1-a} \right) = \ln \ln \frac{1}{d} = \ln (D \cdot \lambda_m^n) - n \ln \lambda, \quad (5a)$$

bzw. in dekadischen Logarithmen:

$$\log \log \left( \frac{1}{d} \right) - 0,362 = \log \kappa_\lambda \cdot l = \log (D \cdot \lambda_m^n) - n \log \lambda. \quad (5b)$$

Für die praktische Durchführung der Absorptionsmessung ist es nun von Bedeutung, daß Becker<sup>4)</sup> zeigen konnte, daß Ruß in einer Flamme und auf einer Glasplatte niedergeschlagen das gleiche Absorptionsverhalten zeigt. Das rührt daher, daß der Gang des Absorptionsvermögens mit der Wellenlänge und damit der Wert von  $n_\lambda$  auf Grund der Mieschen Theorie lediglich von der Teilchengröße und deren Verteilung abhängen. Das Absorptionsvermögen ist daher von der Temperatur der Rußteilchen unabhängig. Diese Eigenschaft ermöglicht erst die hier durchgeführten Rechnungen. Es können also an niedergeschlagenen Rußschichten ausgeführte Messungen zur Konstantenbestimmung herangezogen werden, wo sie sehr viel einfacher und genauer auszuführen sind als in der Flamme selbst. Im sichtbaren Gebiet

<sup>2)</sup> Daher kann auch das Reflexionsvermögen vernachlässigt werden und Absorptionsvermögen  $a$  und Durchlässigkeit  $d$  hängen durch  $a + d = 1$  miteinander zusammen.

<sup>3)</sup> K. Ångström, Ann. Physik 36, 715 (1889).

<sup>4)</sup> A. Becker, Ann. Physik 28, 1017 (1909).

<sup>5)</sup> Nach Möglichkeit sollen hier die Bezeichnungen von Arbeit<sup>1)</sup> beibehalten werden.

<sup>6)</sup> Für  $D$  selbst, wenn man seine Abhängigkeit von  $\lambda_m$  betrachtet, gilt also wegen (3)  $D \sim \lambda_m^{-n}$ .

wurden eigene Messungen<sup>7)</sup> und diejenigen von Naeser und Pepperhoff<sup>8)</sup> benutzt. Für den ultraroten Bereich wurden zwei Meßreihen von Pepperhoff und Bähr<sup>9)</sup> herangezogen<sup>10)</sup>. In diesen vier Fällen war natürlich schon aus meßtechnischen Gründen die Schichtdicke der Probe jeweils verschieden. Nimmt man aber eine Darstellung der Werte  $\log \log 1/d$  als Funktion von

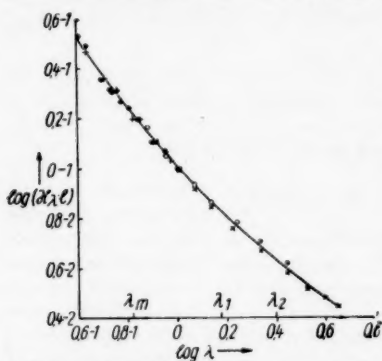


Abb. 1. Absorptionskoeffizient von Amylacetatruß. — gerechnet nach Gl. (7) und (10); ● Meßwerte Rößler-Behrens; ○ Meßwerte Pepperhoff-Bähr, Probe 1; × Meßwerte Pepperhoff-Bähr, Probe 2; + Meßwerte Naeser-Pepperhoff

nach dem ultraroten zu  $n_1$  jedoch erheblich abnimmt [siehe Tab. 1<sup>11)</sup>]. Pepperhoff und Bähr<sup>9)</sup> haben für Amylacetatruß  $n$  im ultraroten Bereich durch einen geschlossenen Ausdruck  $n_1 = 1,20 - 0,55 \log \lambda$  darstellen können, in welchem  $\lambda$  in  $\mu$  gemessen ist. Nun ist diese Form, wenn man sie sich in Gl. (4) eingesetzt denkt, für eine weitere Rechnung und Approximation recht unbequem. Außerdem hat sie im sichtbaren Gebiet keine Gültigkeit. Es wurde daher nach einer mathematisch bequemerer Darstellung gesucht, die dann auch im sichtbaren Gebiet genauso wie im ultraroten gelten sollte.

Deshalb wurde der folgende Ansatz gemacht:

$$\kappa_\lambda \cdot l = D \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^s \left[ \alpha + \beta \cdot \frac{\lambda}{\lambda_m} + \gamma \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda} \right] = D \left[ \beta \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^{s-1} + \alpha \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^s + \gamma \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^{s+1} \right].$$

Im wesentlichen wurde der Vektor  $(\lambda_m/\lambda)^s$  in Anlehnung an die bisherige Darstellung beibehalten. Lediglich  $n$  wurde durch  $s$  ersetzt. Neu hinzugekommen sind Korrekturglieder, die auf- und absteigenden 1. Potenzen von  $\lambda$ . Es wurde also für  $\kappa_\lambda \cdot l$  eine Polynomdarstellung in  $1/\lambda$  mit den Potenzen

<sup>7)</sup> F. Rößler u. H. Behrens, *Optik* **6**, 145 (1950).

<sup>8)</sup> G. Naeser u. W. Pepperhoff, *Arch. Eisenhüttenwes.* **22**, 9 (1951).

<sup>9)</sup> W. Pepperhoff u. A. Bähr, *Arch. Eisenhüttenwes.* **23**, 335 (1952).

<sup>10)</sup> Herrn Dr. Pepperhoff danke ich für die Zurverfügungstellung der Originalwerte.

<sup>11)</sup> Zur Kennzeichnung der Wellenlängenabhängigkeit von  $n$  soll es künftig den Index  $\lambda$  erhalten:  $n_\lambda$ . Das frühere  $n$  selbst ist also identisch mit  $n_{\lambda_m} \equiv n$ .

$s - 1$ ,  $s$  und  $s + 1$  gewählt. Die Korrekturglieder wurden gleich in der dimensionslosen Form  $\lambda_m/\lambda$  bzw.  $\lambda/\lambda_m$  angesetzt. Dieser Ausdruck läßt sich bequem differenzieren. Soll  $\kappa_\lambda l$  für  $\lambda = \lambda_m$  gleich  $D$  sein, dann muß gelten:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad (6)$$

$$\kappa_\lambda l = D \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^s \left[ 1 + \beta \left( \frac{\lambda}{\lambda_m} - 1 \right) + \gamma \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right) \right]. \quad (7)$$

Außerdem wurden noch der experimentellen, ausgeglichenen Kurve zwei Werte von  $\kappa_\lambda l$  für die Wellenlängen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  entnommen. Die so erhaltenen, aber nicht erst wiedergegebenen zwei Gleichungen (7a) für  $\lambda_1$  und (7b) für  $\lambda_2$  genügen zur Bestimmung von  $\beta$  und  $\gamma$ .  $s$  wird schließlich aus dem experimentellen Wert  $n_{\lambda_m}$  der Ableitung an der Stelle  $\lambda_m$  berechnet. Damit erhält  $\lambda_m$  eine neue Bedeutung als diejenige Wellenlänge, von der die Entwicklung ausgeht, für die der Funktionswert mit seiner ersten Ableitung vorgegeben ist, wo also die Polynomdarstellung am genauesten ist. Wie für die  $n_\lambda$ -Bestimmung üblich Gl. (5a), wird  $-\frac{d \ln \kappa_\lambda \cdot l}{d \ln \lambda}$  gebildet.

$$n_\lambda = -\frac{d \ln \kappa_\lambda \cdot l}{d \ln \lambda} = s - \frac{\beta \cdot \frac{\lambda}{\lambda_m} - \gamma \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda}}{1 + \beta \left( \frac{\lambda}{\lambda_m} - 1 \right) + \gamma \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right)}, \quad (8)$$

$$n_{\lambda_m} = \left( -\frac{d \ln \kappa_\lambda \cdot l}{d \ln \lambda} \right)_{\lambda = \lambda_m} = s - \beta + \gamma. \quad (9)$$

Für kleine Werte von  $(\lambda_m/\lambda) - 1 = \varepsilon$  wird

$$n_\lambda = n_{\lambda_m} + \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right) [(\beta + \gamma) - (\beta - \gamma)^2]. \quad (8a)$$

Es sind also jetzt die 4 Gleichungen (6), (7a), (7b) und (9) für die 4 Unbekannten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $s$  gegeben, die zur Bestimmung ausreichen.  $\alpha$  wurde gleich durch (6) eliminiert, so daß es in Zukunft nicht mehr vorkommen wird.

Wie bereits gesagt, wurde  $\lambda_m = 0,66 \mu$  gewählt. Dazu gehört ein  $\kappa_{\lambda_m} l = 0,17$  und aus Abb. 1 ein  $n_{\lambda_m} = 1,27$ . Für  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$  wurden  $1,5 \mu$  bzw.  $2,5 \mu$  verwendet. Diese Wellenlängen wurden deswegen gewählt, weil in diesem Gebiet die Messungen noch genau genug ausführbar waren. Der ausgehenden Kurve wurden die  $\log \kappa_\lambda l$ -Werte entnommen: 0,831–2 bzw. 0,638–2. Die Auflösung<sup>12)</sup> der zugehörigen Gl'n. (7a), (7b) und (9) liefert schließlich:

$$s = 1,47; \beta = 0,32; \gamma = 0,12. \quad (10)$$

Die ausgezogene Kurve der Abb. 1 stellt nun die nach dem Ansatz der Gl. (7) mit den eben bestimmten Zahlen der Gl. (10) errechneten Werte von  $\log \kappa_\lambda l$  dar. Man erkennt, daß die Meßergebnisse recht genau wiedergegeben werden.

Durch Differentiation der Kurve in Abb. 1 bzw., was wegen der Anpassung auf dasselbe hinausläuft, nach Gl. (8) berechnet, ergeben sich die  $n_\lambda$ -

<sup>12)</sup> Herrn Dr. Mücke danke ich für die Durchführung der Rechnung.

Werte der Tab. 1 in ihrer Wellenlängenabhängigkeit. Im sichtbaren Gebiet unterscheiden sich die äußersten Werte um 20%.

Tabelle 1  
 $n_\lambda$ -Werte

$\lambda(\mu)$	0,4	0,5	0,66	0,75	1,0	1,5	2,0	3,0
$n_\lambda$	1,47	1,38	1,27	1,22	1,11	0,97	0,88	0,77

Zeichnet man die Kurve für den sichtbaren Bereich, der in Abb. 1 auf der Abszisse kenntlich gemacht ist, noch einmal in vergrößertem Maßstab heraus, so sieht man in Abb. 2, daß diese gerechnete Kurve so wenig von einer

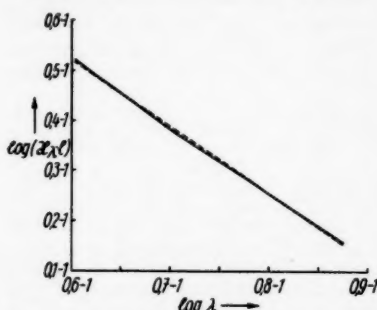


Abb. 2. Absorptionskoeffizient von Amylacetat im sichtbaren Bereich. — gerechnete Kurve; - - - Gerade

Geraden abweicht, daß man aus den experimentellen Daten praktisch stets auf eine Gerade geführt wird, so lange man nicht das sichtbare Gebiet verläßt. Die Neigung dieser Geraden ergibt dann ein  $n_\lambda = 1,34$ , ein Wert, der gut zu der im  $\log \lambda$ -Maßstab mittleren Wellenlänge  $0,55 \mu$  paßt. Damit ist die Bedeutung der bisher angegebenen Zahlen<sup>7)</sup> klargestellt. Ihr Wert kann naturgemäß verschieden ausfallen, je nachdem, ob kürzere oder längere Wellenlängen bei der Messung bevorzugt wurden. Unglücklicherweise ist der sichtbare Bereich gerade das Gebiet der stärksten Änderungen von  $n_\lambda$ .

Diese Abhängigkeit des  $n$ -Wertes von  $\lambda$  steht in Übereinstimmung mit den Forderungen der Mieschen Theorie, wenn man die Größenverteilung des Amylacetatrußes berücksichtigt<sup>13)</sup>. So ergibt sich der zwischen 0,4 und 0,7 bzw.  $0,75 \mu$  gebildete Gradient  $\Delta n / \Delta \lambda(\mu)$ , sowohl empirisch nach Tab. 1 dieses Textes als auch theoretisch nach Tab. 4 von Arbeit<sup>13)</sup> zu 0,7.

### C. Schwarze Temperatur

Die wahre Temperatur  $T$  der Hefner-Flamme beträgt  $1710^\circ \text{K}^{14)}$ . Dafür kann die Strahlung  $E_{\lambda T}$  eines schwarzen Körpers gleicher Temperatur mittels der Planckschen Funktion berechnet werden. Das Absorptionsvermögen  $\alpha_\lambda$  folgt aus Gl. (1), wenn man für  $\kappa_\lambda l$  die Werte des vorigen Abschnittes der Gl. (7) unter Benutzung der Konstanten (10) einsetzt. Wie bereits gesagt, wurde  $D = 0,17$  gewählt. Diese Wahl beeinflusst den Gang mit der Wellenlänge jedoch nur wenig, da für kleine Schichtdicken  $D$  nur als

<sup>13)</sup> F. Rößler, Optik 10, 546 (1953).

<sup>14)</sup> F. Hoffmann u. C. Tingwaldt, Optische Photometrie, Braunschweig 1938, S. 124.

Faktor eingeht. Das Produkt beider Zahlen ergibt auf Grund des Kirchhoffschen Gesetzes die Strahlungsverteilung  $J_\lambda$  der Flamme

$$J_\lambda = a_\lambda \cdot E_{\lambda T}. \quad (11)$$

In Abb. 3 ist die nach Gl. (11) berechnete Größe  $\log(J_\lambda \cdot \lambda^5)$  als Funktion von  $1/\lambda$  als Kurve dargestellt.

Weiter sind in gleicher Weise die von Pepperhoff und Bähr<sup>9)</sup> an der Hefner-Flamme gemessenen Werte im ultraroten Bereich eingetragen worden.

Die zu längeren Wellenlängen gehörigen Daten sind allerdings fortgelassen worden, weil den Werten der Gl. (11) sich naturgemäß noch die Emissionsbanden von  $\text{CO}_2$  und  $\text{H}_2\text{O}$  überlagern, die aber hier als nicht zum Ruß gehörig außer Betracht bleiben sollen. Weiter sind unter passender Parallelverschiebung in Ordinateenrichtung die Meßwerte von Ångström<sup>15)</sup>, von Valentiner und Rössiger<sup>16)</sup> und diejenigen von Pearson und Pleasance<sup>17)</sup> eingetragen worden. Man erkennt, daß die Übereinstimmung von Messung und Rechnung eine gute ist. Damit ist aber gezeigt, daß die im ersten Teil des Textes gemachten Voraussetzungen über das Absorptionsvermögen berechtigt sind, im besonderen, daß es zulässig ist, das Absorptionsverhalten an niedergeschlagenem Ruß zu studieren.

Setzt man  $J_\lambda$  der Strahlung eines schwarzen Körpers aber anderer Temperatur  $S$  gleich, dann erhält man die Definitionsgleichung für die schwarze Temperatur  $S$ :

$$E_{\lambda S} = a_\lambda \cdot E_{\lambda T}. \quad (12)$$

Die Rechnungen werden am einfachsten, wenn wir uns auf so kleine  $\lambda \cdot T$ -Werte<sup>18)</sup> beschränken, daß die Plancksche durch die Wiensche Funktion ersetzt werden kann. Aus (11) und (12) wird dann:

$$J_\lambda^* = a_\lambda \cdot \frac{2 c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} = \frac{2 c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda S}} \quad (13)$$

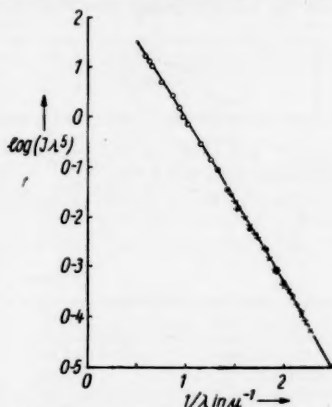


Abb. 3. Emission der Hefner-Flamme  
○ Meßwerte Pepperhoff-Bähr;  
● Meßwerte Ångström; × Meßwerte Valentiner; + Meßwerte Pearson-Pleasance

<sup>15)</sup> K. Ångström, Physic. Rev. 5, 456 (1904).

<sup>16)</sup> S. Valentiner u. M. Rössiger, Ann. Physik (IV) 76, 785 (1925).

<sup>17)</sup> A. R. Pearson u. B. Pleasance, Proc. phys. Soc. London 47, 1032 (1935).

<sup>18)</sup> Bleibt  $\lambda \cdot T \leq 0,22 \text{ cm} \cdot \text{grad}$ , dann unterscheiden sich beide Funktionen um weniger als 1%. In unserem Falle darf die Wellenlänge für diese Forderung  $1,9 \mu$  dann nicht überschreiten.

oder in anderer Form:

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{S_\lambda} = \frac{\lambda}{c_2} \ln a_\lambda, \quad (14)$$

wobei  $a_\lambda$  aus Gl. (1) und (7) zu errechnen ist.

Wählen wir speziell  $\lambda = \lambda_m$ , so wird bei Berücksichtigung von Gl. (2):

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{S_{\lambda_m}} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \ln(1 - e^{-D}). \quad (14a)$$

Die zur Eliminierung von  $T$  gebildete Differenz der Gl. (14a) und (14) ergibt

$$\frac{1}{S_\lambda} - \frac{1}{S_{\lambda_m}} = \frac{\lambda_m}{c_2} \ln(1 - e^{-D}) - \frac{\lambda}{c_2} \ln \left( 1 - e^{-D \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^\alpha \left[ 1 + \beta \left( \frac{\lambda}{\lambda_m} - 1 \right) + \gamma \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right) \right]} \right). \quad (15)$$

Damit läßt sich  $S_\lambda$  für jede Wellenlänge  $\lambda$  berechnen. Für die Amylacetatflammen gehen wir von  $S_{0,66} = 1490$  °K aus<sup>4)</sup> und erhalten damit die Werte der Tab. 2. Für  $c_2$  ist wie im gesamten Text 1,438 cm · grad verwendet worden.

Tabelle 2  
Schwarze Temperatur  $S_\lambda$  in °K

$\lambda$ ( $\mu$ )	0,4	0,5	0,66	0,75	1	2
exakte Gl. (15)	1610	1564	1490	1450	1339	996
Näherungs-Gl. (18/19)	1641	1577	1490	1451	1354	1082

In Gl. (18/19) wird später noch eine Gl. (15) entsprechende Gleichung angegeben, in der die Differenzen der Wellenlängen explizit vorkommen. Allerdings gilt (18/19) im Gegensatz zu (15) nur angenähert. Die schwarze Temperatur ist wie bekannt verhältnismäßig stark von der Wellenlänge abhängig. So beträgt der Unterschied in  $S$  für die Grenzen des sichtbaren Bereiches 13%.

#### D. Farbtemperatur

Falls es eine in einem gewissen Bereich konstante Temperatur gibt, die die Wellenlängenabhängigkeit der Strahlung in der Form des Planckschen Strahlungsgesetzes beschreibt, so nennt man diese Temperatur „Farbtemperatur“ und bezeichnet sie mit  $F$ .

$$p \cdot E_{\lambda F} = a_\lambda \cdot E_{\lambda T},$$

$$J_\lambda^* = p \cdot \frac{2 c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda F}} = a_\lambda \cdot \frac{2 c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}, \quad (16)$$

$p$  und  $F$  sind dabei definitionsgemäß von  $\lambda$  unabhängige Größen.

Aus Gl. (16) folgt:

$$\log(J_\lambda^* \cdot \lambda^5) = -\frac{c_2 \cdot 0,4343}{\lambda \cdot F} + \log(2 c_1 \cdot p).$$

In der Darstellung der spektralen Verteilung (Abb. 3) erhält man also die reziproke Farbtemperatur aus der Tangentenrichtung. Man erkennt, daß diese Tangentenrichtung und damit auch  $F$  durchaus nicht unabhängig von der Wellenlänge ist<sup>19)</sup>. Es ergeben sich vielmehr die Werte der Tab. 3 für die Farbtemperatur  $F$  als Funktion der Wellenlänge.

Tabelle 3  
Farbtemperatur  $F$ ,  $f$  in °K ( $\lambda_m = 0,66 \mu$ )

$\lambda (\mu)$	0,4	0,5	0,66	0,75	1
Abb. 3 + Gl. (16)	1810	1840	1882	1900	1940

Bereits innerhalb des sichtbaren Bereiches ist die Abhängigkeit von  $\lambda$  für  $F$  überraschenderweise fast mit derjenigen für  $S_\lambda$  vergleichbar.

Sowohl  $F$  wie  $f$  müssen streng genommen nach neueren deutschen Normen<sup>20)</sup> „Verteilungstemperatur“ heißen. Wir wollen hier jedoch entsprechend dem früheren Sprachgebrauch die Bezeichnung „Farbtemperatur“ beibehalten, um die Kontinuität gegenüber vorhergehenden Veröffentlichungen zu wahren. Wir müssen aber stets beachten, daß es sich dabei primär um einen Zahlenwert handelt, der aus einer Messung der spektralen Verteilung und nicht des Farbreizes entstanden ist.

Eine im strengen Sinne konstante Farbtemperatur  $F$  existiert also eigentlich nicht<sup>21)</sup>. Es muß daher die Definition der Gl. (16) verlassen und durch (17) die „differentielle“ Farbtemperatur  $f$  eingeführt werden<sup>22)</sup> 14), deren rechte

<sup>19)</sup> Mit dieser Voraussetzung wurde in Arbeit<sup>1)</sup> noch gerechnet. Die von  $\lambda$  abhängige Farbtemperatur sei mit  $f$  bezeichnet (Anm. <sup>21)</sup>).

<sup>20)</sup> Internationales Wörterbuch der Lichttechnik. Paris 1957, S. 39.

<sup>21)</sup> Ist in Gl. (15)  $F$  schwach von  $\lambda$  abhängig, dann ist es auch  $p$ . Damit verliert die Definition von  $p$  als konstante Größe ihren Sinn. Mit  $F$  sei in Zukunft die von  $\lambda$  unabhängige für  $\lambda_m$  geltende, mit  $f$  die abhängige Farbtemperatur bezeichnet,  $f_{\lambda_m} \equiv F$ .

<sup>22)</sup> Wie es von den Metallen durchaus bekannt ist<sup>14)</sup> 23) 24), läßt sich für diese  $1/\lambda$   $S$  als Reihe darstellen:

$$\frac{1}{\lambda S_\lambda} = p^* + q^* \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{r^*}{2} \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2. \quad (18)$$

Dabei sind die Größe nach die rechts folgenden Konstanten Korrekturen der vorhergehenden. Auch für die Rußflammen erweist sich eine solche Darstellung also als notwendig. Für die Farbtemperatur  $f$  folgt dann wegen (17) daraus:

$$\frac{1}{f} = q^* + r^* \cdot \frac{1}{\lambda}. \quad (18a)$$

Wählt man  $\lambda = \lambda_m$  und bildet die Differenz von Gl. (18) und der mit  $1/\lambda_m$  multiplizierten Gl. (18a), so entsteht:

$$\frac{1}{\lambda_m S_\lambda} - \frac{1}{\lambda_m F} = p^* - \frac{r^*}{2} \left( \frac{1}{\lambda_m} \right)^2.$$

Aus der Differenz der späteren Gl. (21) und (14a) ergibt sich eine andere Darstellung für  $(1/\lambda_m \cdot S_\lambda) - (1/\lambda_m \cdot F)$ . Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke folgt:

$$p^* - \frac{r^*}{2 \lambda_m^2} = \frac{1}{c_2} \left[ \frac{D n_{\lambda_m}}{e^p - 1} - \ln (1 - e^{-p}) \right].$$

(Fortsetzung der Fußnote auf S. 404.)

Seite aus (14) hervorgeht.

$$\frac{1}{f} \equiv \frac{d\left(\frac{1}{\lambda S}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{T} - \frac{1}{c_2} \cdot \frac{\partial \ln a_\lambda}{\partial \left(\frac{1}{\lambda}\right)}. \quad (17)$$

(Fortsetzung der Fußnote <sup>23</sup>)

Gl. (21) selbst lautet:

$$q^* + \frac{r^*}{\lambda_m} = \frac{1}{T} - \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{Dn_{\lambda_m}}{e^D - 1}.$$

Unter Verwendung der späteren Gl. (23) und der Abkürzung

$$\varphi = -(s-1) \left(1 - \frac{\beta}{n_{\lambda_m}}\right) - (s+1) \frac{\gamma}{n_{\lambda_m}} + \frac{Dn_{\lambda_m}}{1 - e^{-D}} \quad (18b)$$

wird dann:

$$\left. \begin{aligned} p^* &= -\frac{1}{c_2} \ln(1 - e^{-D}) + \frac{1}{2c_2} \cdot \frac{Dn_{\lambda_m}}{e^D - 1} (2 + \varphi) \\ q^* &= \frac{1}{T} - \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{Dn_{\lambda_m}}{e^D - 1} \{1 + \varphi\} \\ r^* &= \frac{\lambda_m^2}{c_2} \cdot \frac{Dn_{\lambda_m}}{e^D - 1} \cdot \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Dabei ist allerdings zu beachten, daß Gl. (22) und damit (23) nur das erste Glied einer Reihenentwicklung darstellen.

Mit den Zahlenwerten der Gl. (10),  $D = 0,17$  und  $T = 1710$  °K, wird daraus:

$$p^* = +2,43; \quad q^* = +0,489 \cdot 10^{-3}; \quad r^* = +0,0028 \cdot 10^{-6}.$$

Dabei ist  $\lambda$  in cm gemessen.

Berechnet man mit Hilfe dieser Werte nach Gl. (18) die schwarzen Temperaturen für verschiedene Wellenlängen (in Tab. 2 angegeben), so stimmen diese mit den nach Gl. (15) berechneten in der Umgebung von  $\lambda_m$  überein. Die Darstellungen durch Gl. (18/19) und Gl. (15) sind also in diesem Bereich identisch. Bei größeren Unterschieden zwischen  $\lambda$  und  $\lambda_m$  treten jedoch Abweichungen auf (Tab. 2). Hier macht es sich bemerkbar, daß Gl. (18/19) eben nur eine Näherung darstellt, während (15) exakt gilt.

Wendet man Gl. (18) einmal auf  $\lambda$  und dann auf  $\lambda_m$  an, so folgt:

$$\frac{1}{\lambda S_\lambda} - \frac{1}{\lambda_m S_{\lambda_m}} = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_m}\right) \left[q^* + \frac{r^*}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_m}\right)\right]. \quad (18c)$$

Führt man durch  $2/\bar{\lambda} = (1/\lambda) + (1/\lambda_m)$  eine reziprok gemittelte Wellenlänge  $\bar{\lambda}$  ein, so wird schließlich:

$$\frac{1}{\lambda S_\lambda} - \frac{1}{\lambda_m S_{\lambda_m}} = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_m}\right) \cdot \left(q^* + \frac{r^*}{\bar{\lambda}}\right) = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_m}\right) \cdot \frac{1}{f_\lambda}. \quad (18d)$$

Das ist die Gleichung, die am bequemsten für die Berechnung von  $S_\lambda$  ist, sobald  $f$  bekannt ist. Formal stimmt sie mit der bisher bekannten Umrechnungsgleichung geringerer Genauigkeit ( $r^* = 0$ ) überein. Lediglich wird in (18d)  $f$  an der Stelle  $\bar{\lambda}$  verwandt.

<sup>23</sup>) F. Henning, Temperaturmessung. Leipzig 1951.

<sup>24</sup>) G. Ribaud, Traité de pyrométrie optique. Paris 1931.

Bildet man in Abb. 3  $\frac{\partial \log (J_{\lambda}^* \cdot \lambda^5)}{\partial (\frac{1}{\lambda})}$ , berechnet also die jeweilige Tangentenrichtung, so folgt aus Gl. (13) und (17)

$$\frac{\partial \log (J_{\lambda}^* \cdot \lambda^5)}{\partial (\frac{1}{\lambda})} = -\frac{c_2 \cdot 0,4343}{T} + \frac{\partial \log a_{\lambda}}{\partial (\frac{1}{\lambda})} = -\frac{c_2 \cdot 0,4343}{f}.$$

Damit ergibt sich also auch auf diesem Wege (aus der Tangentenrichtung) der Wert  $f$  der Farbtemperatur, d. h. die Zahlen der Tab. 3 sind bereits diese  $f$ -Werte, die der strengeren Definition (17) genügen.

Unser Ziel ist es nun,  $f$  direkt zu berechnen. Wir bilden unter Benutzung von Gl. (9) zur Berechnung von  $f$ :

$$\frac{\partial \ln a_{\lambda}}{\partial \frac{1}{\lambda}} = \frac{e^{-\kappa_{\lambda} \cdot l} \cdot \frac{\partial \kappa_{\lambda} \cdot l}{\partial \frac{1}{\lambda}}}{1 - e^{-\kappa_{\lambda} \cdot l}} = \frac{\lambda_m D \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^{s-1} \left[ n_{\lambda_m} + \beta(s-1) \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} - 1\right) + \gamma(s+1) \left(\frac{\lambda_m}{\lambda} - 1\right) \right]}{e^{D \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^s \left[ 1 + \beta \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} - 1\right) + \gamma \left(\frac{\lambda_m}{\lambda} - 1\right) \right]} - 1}.$$

Gl. (17) wird dann zu:

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{f} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{D \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^{s-1} \left[ n_{\lambda_m} + \beta(s-1) \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} - 1\right) + \gamma(s+1) \left(\frac{\lambda_m}{\lambda} - 1\right) \right]}{e^{D \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^s \left[ 1 + \beta \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} - 1\right) + \gamma \left(\frac{\lambda_m}{\lambda} - 1\right) \right]} - 1}. \quad (20)$$

Speziell für  $\lambda = \lambda_m$  wird:

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{F} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{D \cdot n_{\lambda_m}}{e^D - 1}. \quad (21)$$

Dabei ist  $f(\lambda_m) = F$  gesetzt worden. Für kleine  $D$  ergibt sich:

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{F} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot n_{\lambda_m} \left(1 - \frac{D}{2}\right) \rightarrow \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot n_{\lambda_m}. \quad (21a)$$

Gl. (21) stimmt überein mit Gl. (27<sup>1</sup>) in Arbeit<sup>1</sup>). Dort wird also nur von der für  $\lambda_m$  gültigen Farbtemperatur gesprochen. Setzt man die Zahlenwerte von Gl. (10),  $D = 0,17$  und  $T = 1710$  °K, in Gl. (20) ein, so erhält man die  $f$ -Werte der Tab. 4 (obere Zeile). Innerhalb des sichtbaren Gebietes betragen die Unterschiede fast 100°, d. h. 5%.

Tabelle 4  
Farbtemperatur  $f$  in °K ( $\lambda_m = 0,66 \mu$ )

	$\lambda (\mu)$ $\varepsilon$	0,4 0,65	0,5 0,32	0,66 0	0,75 -0,12	1 -0,34
exakte	Gl. (20)	1816	1841	1882	1901	1952
genäherte	Gl. (22)	1790	1835	1882	1901	1937

Bedenkt man, daß eine graphische Differentiation der Kurve in Abb. 3 sich nur ungenau ausführen läßt, so ist die Übereinstimmung der Farbtemperaturen  $f$  der Tab. 4 nach Gl. (20) mit  $F, f$  der Tab. 3, wie wir sie fordern müssen, als ausreichend anzusehen.

Für kleine Werte von  $\lambda_m/\lambda - 1 \equiv \varepsilon$  läßt sich Gl. (20) nach dem Taylor'schen Satz entwickeln. Man hat die Ableitung nach  $\varepsilon$  an der Stelle  $\varepsilon = 0$ , d. h.  $\lambda = \lambda_m$  zu bilden. Das von  $\varepsilon$  freie, für  $\lambda = \lambda_m$  gültige Glied ist dann identisch mit der rechten Seite von Gl. (21), wie es ja auch zu erwarten ist.

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{f} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{Dn_{\lambda_m}}{e^D - 1} \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right) \cdot \left\{ (s-1) \left( 1 - \frac{\beta}{n_{\lambda_m}} \right) + (s+1) \frac{\gamma}{n_{\lambda_m}} - \frac{Dn_{\lambda_m}}{1 - e^{-D}} \right\} \right]. \quad (22)$$

In Abb. 4 ist für die nur geringe Abweichung  $\varepsilon = \pm 0,1$  die Abhängigkeit der Größe  $(c_2/\lambda_m) \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{f} \right)$  von  $D$  dargestellt. Die zu  $D = 0$  gehörigen

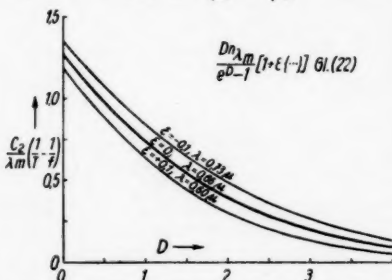


Abb. 4. Dickenabhängigkeit der Farbtemperatur

Werte  $\varepsilon = \pm 0,1$  sind 1,19 bzw. 1,36. Zu den äußersten Wellenlängen im sichtbaren Gebiet 0,75 bzw.  $0,4 \mu$  mit  $\varepsilon = -0,12$  und  $\varepsilon = +0,65$  gehören die Werte 1,4 bzw. 0,9. Aus  $\partial r^*/\partial D = 0$  folgt gemäß Gl. (23), daß die Abweichung der Farbtemperatur vom Normalwert ( $\lambda = \lambda_m$ ) für  $D = 1,03$  am größten ist.  $r^*$  wird dort zu  $-0,32$ , während es für  $D = 0$  nur zu  $-0,26$  wird.

Für kleine  $D$  ergibt sich andererseits aus Gl. (20):

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c_2}. \quad (20a)$$

$$\frac{\left[ n_{\lambda_m} + \beta(s-1) \left( \frac{\lambda}{\lambda_m} - 1 \right) + \gamma(s+1) \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right) \right] \cdot \left\{ 1 - \frac{D}{2} \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^s \left[ 1 + \beta \left( \frac{\lambda}{\lambda_m} - 1 \right) + \gamma \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right) \right] \right\}}{1 + \beta \left( \frac{\lambda}{\lambda_m} - 1 \right) + \gamma \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right)} \rightarrow \frac{\lambda}{c_2} \cdot \frac{n_{\lambda_m} + \beta(s-1) \left( \frac{\lambda}{\lambda_m} - 1 \right) + \gamma(s+1) \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right)}{1 + \beta \left( \frac{\lambda}{\lambda_m} - 1 \right) + \gamma \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right)}.$$

In Tab. 4 sind außerdem die nach Gl. (22) berechneten Werte der Farbtemperatur (für  $D = 0,17$  natürlich) angegeben. Bei 1% zulässiger Differenz kann Gl. (22) für  $-0,36 \leq \varepsilon \leq 0,55$  benutzt werden. Aus Gl. (22) folgt die Beziehung zur Umrechnung der Farbtemperatur auf andere Wellenlängen.

$$r^* = \frac{\partial \left( \frac{1}{f} \right)}{\partial \left( \frac{1}{\lambda} \right)} = \frac{\lambda_m^2}{c_2} \cdot \frac{Dn_{\lambda_m}}{e^D - 1} \left\{ - (s-1) \left( 1 - \frac{\beta}{n_{\lambda_m}} \right) - (s+1) \frac{\gamma}{n_{\lambda_m}} + \frac{Dn_{\lambda_m}}{1 - e^{-D}} \right\}. \quad (23)$$

Diese Ableitung ist gleich dem  $r^*$  von Anm.<sup>22)</sup> auf S. 404. Für kleine  $D$  wird  $r^*$ :

$$r^* = \frac{\partial \left( \frac{1}{f} \right)}{\partial \left( \frac{1}{\lambda} \right)} = \frac{\lambda_m^2}{c_2} n_{\lambda_m} \left( 1 - \frac{D}{2} \right) \left\{ - (s-1) \left( 1 - \frac{\beta}{n_{\lambda_m}} \right) - (s+1) \frac{\gamma}{n_{\lambda_m}} + n_{\lambda_m} \left( 1 + \frac{D}{2} \right) \right\}. \quad (23a)$$

Wird schließlich auch noch  $(\lambda_m/\lambda) - 1 = \varepsilon$  klein, so geht (20a) über in:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} - \frac{1}{f} &= \frac{\lambda}{c_2} n_{\lambda_m} \left\{ 1 - \frac{D}{2} + \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right) \left[ \beta \left( 1 - \frac{s-1}{n_{\lambda_m}} \right) - \gamma \left( 1 - \frac{s+1}{n_{\lambda_m}} \right) - \frac{D}{2} n_{\lambda_m} \right] \right\} \\ &\rightarrow \frac{\lambda}{c_2} n_{\lambda_m} \left\{ 1 + \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right) \left[ \beta \left( 1 - \frac{s-1}{n_{\lambda_m}} \right) - \gamma \left( 1 - \frac{s+1}{n_{\lambda_m}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22a)$$

Der Anschaulichkeit halber sei die letzte Gl. (22a) auch noch in Zahlenwerten hingeschrieben (dabei ist  $\lambda$  in  $\mu$  gemessen):

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{f} = 10^{-4} \lambda \cdot 0,885 \left\{ 1 - \frac{D}{2} + \left( \frac{0,66}{\lambda} - 1 \right) [0,315 - 0,635 D] \right\}.$$

Stellt man den sichtbaren Bereich der Abb. 3 noch einmal in Abb. 5 getrennt für sich dar, so sieht man, daß die Krümmung der Kurve, trotzdem die Farbtemperaturen sich gemäß Tab. 4 um 5% unterscheiden, so gering ist, daß die Kurve innerhalb der Meßfehler von einer Geraden nicht zu unterscheiden ist. Das gilt besonders deswegen, weil aus Intensitätsgründen die Messungen kaum bis  $0,4 \mu$  durchgeführt werden können. Zu der eingezeichneten Geraden gehört eine Farbtemperatur von  $1870^\circ \text{K}$ . Dieser Wert der Farbtemperatur paßt zur reziprok gemittelten Wellenlänge  $0,62 \mu$  des Bereiches, in dem Gerade und Kurve zusammenfallen. In Abb. 5 der Arbeit<sup>1)</sup> sind die Messungen von Pearson und Pleasance<sup>17)</sup> mit ihrer Temperaturgeraden dargestellt. Die sicher auf der Geraden liegenden Meßpunkte reichen von  $0,53$  bis  $0,7 \mu$ . Ihnen ist eine reziprok gemittelte Wellenlänge  $0,6 \mu$  und nach Gl. (20) ein  $f = 1866^\circ$  zugeordnet. Die Messungen sind so exakt, daß man bei kürzeren Wellenlängen als  $0,53 \mu$  die Abweichungen der Meßpunkte von der Geraden im geforderten Sinne bereits angedeutet findet. Demgegenüber reichen die Messungen von Valentiner und Rössiger von  $0,44$  bis  $0,56 \mu$ <sup>25)</sup>. Dazu gehört die reziprok gemittelte Wellenlänge  $0,49 \mu$  mit  $f = 1839^\circ \text{K}$ . Die Differenz beider Zahlen beträgt  $27^\circ$ . Es ist also durchaus

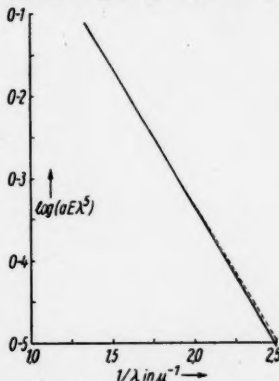


Abb. 5. Farbtemperaturgerade der Hefner-Flamme im sichtbaren Bereich. — gerechnete Werte; --- Gerade

<sup>25)</sup> Die Meßpunkte von Angström mögen wegen ihrer geringeren Genauigkeit und wegen ihres größeren Alters außer Betracht bleiben.

verständlich, wenn beide Autoren die Farbtemperaturen unterschiedlich zu 1897° bzw. 1840 °K mit einer Differenz von 57° finden. Wir kommen später auf diese Zahlen noch zurück.

### E. Bezugswellenlänge

Während bisher der Einfluß von  $\lambda$  betrachtet wurde, gehen wir jetzt dazu über, die Bezugswellenlänge  $\lambda_m$  zu verändern. Da die Bezugswellenlänge willkürlich gewählt werden kann, dürfen die Temperaturen von ihr nicht abhängen. Wir halten in diesem Abschnitt also  $\lambda$  fest, und zwar wählen wir bei der Durchrechnung von Beispielen  $\lambda = 0,66 \mu$ , damit wir für  $\lambda_m = 0,66 \mu$  wieder zu dem Normalwert  $T = 1882^\circ \text{K}$  kommen.

Bei Wahl eines anderen  $\lambda_m$  ist zu bedenken, daß sich die Größen  $D$ ,  $s$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  mit  $\lambda_m$  verändern. Wir haben davon auszugehen, daß die gemessenen Werte von  $\kappa_\lambda \cdot l$ , wie sie in Abb. 1 dargestellt sind, ihre Größe beibehalten, selbst wenn  $\lambda_m$  durch  $\lambda_m^*$  ersetzt wird<sup>26)</sup>. Wenn aber  $\kappa_\lambda \cdot l$  sich gleich bleibt, so gilt das gleiche von  $a_\lambda$  der Gl. (1) und damit gemäß Gl. (17) auch für  $f$ . Wir erhalten also das Resultat, daß die Farbtemperatur von der Wahl von  $\lambda_m$  unabhängig ist, wie es auch zu verlangen ist<sup>27)</sup>.

Ein solches Ergebnis ist aber durchaus nicht selbstverständlich. Stellen wir uns nämlich auf den Standpunkt der Arbeit<sup>1)</sup>, bei der die zur Verfügung stehenden Konstanten nicht zu einer völligen Anpassung an die  $\kappa_\lambda \cdot l$ -Kurve ausreichen, verwenden also für eine dünne Flamme Gl. (21a) mit einem festen  $n = 1,27$ ,  $T = 1710^\circ \text{K}$  und  $D = 0,17$ , so erhalten wir die Daten der Tab. 5.

<sup>26)</sup> Will man  $s$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  für ein neues  $\lambda_m^*$  ausrechnen, so kann man am einfachsten so vorgehen, wie es auf S. 399 geschildert ist. Man kann aber auch die Konstanz von  $\kappa_\lambda \cdot l$  ausnutzen, schreibt also Gl. (7) einmal für  $\lambda_m$  und ein zweites Mal für  $\lambda_m^*$  hin, erhält dadurch eine Gleichung, in der man speziell  $\lambda = \lambda_m$  bzw.  $\lambda = \lambda_m^*$  wählt. So ergibt sich:

$$D = D^* \left( \frac{\lambda_m}{\lambda_m^*} \right)^{s^*} \left[ 1 + \beta^* \left( \frac{\lambda_m}{\lambda_m^*} - 1 \right) + \gamma^* \left( \frac{\lambda_m^*}{\lambda_m} - 1 \right) \right],$$

$$D \left( \frac{\lambda_m}{\lambda_m^*} \right)^s \left[ 1 + \beta \left( \frac{\lambda_m^*}{\lambda_m} - 1 \right) + \gamma \left( \frac{\lambda_m}{\lambda_m^*} - 1 \right) \right] = D^*.$$

Dasselbe macht man mit Gl. (9) und erhält:

$$s - \beta + \gamma = n_{\lambda_m} = s^* - \frac{\beta^* \frac{\lambda_m}{\lambda_m^*} - \gamma^* \frac{\lambda_m^*}{\lambda_m}}{1 + \beta^* \left( \frac{\lambda_m}{\lambda_m^*} - 1 \right) + \gamma^* \left( \frac{\lambda_m^*}{\lambda_m} - 1 \right)},$$

$$s - \frac{\beta \frac{\lambda_m^*}{\lambda_m} - \gamma \frac{\lambda_m}{\lambda_m^*}}{1 + \beta \left( \frac{\lambda_m^*}{\lambda_m} - 1 \right) + \gamma \left( \frac{\lambda_m}{\lambda_m^*} - 1 \right)} = s^* - \beta^* + \gamma^* = n_{\lambda_m^*}.$$

Aus diesen 4 Gleichungen lassen sich dann die Unbekannten  $D^*$ ,  $s^*$ ,  $\beta^*$  und  $\gamma^*$  bestimmen.

<sup>27)</sup> In Gl. (20a) drückt sich das äußerlich bereits dadurch aus, daß  $\lambda_m$  im ersten maßgebenden Faktor der rechten Seite durch  $\lambda$  ersetzt worden ist.

Tabelle 5  
Farbtemperatur  $F$  in  $^{\circ}\text{K}$  ( $\lambda = 0,66 \mu$ ;  $D = 0,17$ )

$\lambda_m (\mu)$	0,4	0,5	0,66	0,75	1,0
nach Gl. (21a)	1810	1837	1882	1908	1986

Von einer Konstanz<sup>28)</sup> der so berechneten Farbtemperatur in bezug auf  $\lambda_m$  kann also nicht mehr die Rede sein, vielmehr unterscheiden sich die Werte im sichtbaren Bereich um nahezu  $100^{\circ}$ , das sind über 5%. Ein mit  $\lambda_m$  veränderliches  $n_{\lambda_m}$  würde die Unterschiede auf 4% herabdrücken. Ebenso sind sie bei größerem  $D$  reduziert. Es gelingt aber nicht, sie zu 0 zu machen, wie die folgende Rechnung zeigt, bei der wir wieder (gemäß den Voraussetzungen der Arbeit<sup>1)</sup>)  $n$  als konstant ansehen und von der rechten Seite von Gl. (21) ausgehen.

$$\frac{\partial \left( \lambda_m \cdot n \cdot \frac{D}{e^D - 1} \right)}{\partial \lambda_m} = \frac{n \cdot D}{e^D - 1} - n^2 \cdot D \cdot \frac{e^D - 1 - D e^D}{(e^D - 1)^2} \quad (25)$$

Dabei ist  $\partial D / \partial \lambda_m = -n (D / \lambda_m)$  gesetzt worden [gemäß Anmerkung<sup>6)</sup> auf S. 397]. Für kleine  $D$ -Werte wird die Ableitung zu  $n$  und für große  $D$ -Werte wird sie zu 0. Die rechte Seite verläuft monoton, hat also auch dazwischen keine Nullstellen. Erst die unendlich dicke Schicht würde also die geforderte Konstanz ergeben. Da sie aber dem schwarzen Strahler entspricht, und dort  $F$  und  $T$  identisch werden, ist dieser Fall für uns ohne Interesse. Am klarsten zeigt sich der Widerspruch in Gl. (21a) für  $D = 0$ : Die linke Seite ist für konstantes  $F$  unabhängig von  $\lambda_m$ , während es die rechte Seite nicht ist, was eben nicht angängig ist.

Es ist also prinzipiell nicht möglich, die rechte Seite von Gl. (21) unabhängig von  $\lambda_m$  zu machen. Daraus folgen dann die verschiedenen Farbtemperaturen der Tab. 5. Andererseits hat Abb. 5 gezeigt, daß innerhalb der

<sup>28)</sup> Wäre in Arbeit<sup>1)</sup> nicht von der hiesigen Gl. (16), sondern von (17) als Definition der Farbtemperatur ausgegangen worden, so hätte sich an Stelle von (20)

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{f^*} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot n_{\lambda_m} \cdot \frac{D \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^{n-1}}{e^{\left( \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^n} - 1} \quad (24)$$

und für kleine  $D$

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{f^*} = \frac{\lambda}{c_3} \cdot n_{\lambda_m} \cdot \left( 1 - \frac{D}{2} \right) \quad (24a)$$

ergeben.  $f^*$  ist also auch hier von  $\lambda_m$  unabhängig, dafür aber von  $\lambda$  abhängig geworden, wie es Tab. 6 zeigt. Wir haben gewissermaßen den Spezialfall  $\beta = \gamma = 0$  und  $s = n_{\lambda_m}$  vor uns. Andererseits sollte man, wenn man  $f(\lambda)$  betrachtet, die Abhängigkeit gleich vollständig durch  $\beta \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$  und  $s \neq n_{\lambda_m}$  angeben.

Tabelle 6  
Genäherte Farbtemperatur  $f^*$  in  $^{\circ}\text{K}$  ( $\lambda_m = 0,66 \mu$ ;  $D = 0$ )

$\lambda (\mu)$	0,4	0,5	0,66	0,75	1,0
nach Gl. (24a)	1802	1828	1882	1911	1996

Meßgenauigkeit die Farbtemperatur aus den Messungen sich praktisch als konstant ergibt. Würde man also zur Berechnung der wahren Temperatur  $T$  mit dem gemessenen  $F = 1870^\circ\text{K}$  und  $D = 0,17$  in Gl. (21) eingehen, so würde man je nach der Wahl von  $\lambda_m$  die bis zu 5% unterschiedlichen Werte der Tab. 7 für  $T$  erhalten. Eine solche Unsicherheit in  $T$  ist naturgemäß nicht tragbar, da es sich bei der wahren Temperatur  $T$  um eine Größe handelt, die von Wellenlängen gänzlich unabhängig ist. Diese Unsicherheit in der  $T$ -Bestimmung ist für dünne Flammen am größten. Einmal hat dann die rechte Seite von Gl. (21) ihren größten Wert. Andererseits ist  $\lambda_m$  nicht mehr durch die Messung der schwarzen Temperatur  $S$  festgelegt. Wie in Arbeit <sup>1)</sup> ausgeführt wurde und hier in Abb. 6 noch einmal dargestellt ist, wird  $D$  nämlich aus der Differenz von  $\frac{1}{S} - \frac{1}{F}$  bestimmt (Pfeil wird zwischen die beiden Kurven eingepaßt). Dabei ist es naturgemäß notwendig, daß beide Messungen bei der gleichen mittleren Wellenlänge  $\lambda_m$  ausgeführt worden sind. Wir kommen darauf noch einmal zu sprechen. Bei dünnen Flammen wird  $S$  klein und ist nicht mehr zur Bestimmung von  $D$  heranzuziehen, bzw.  $D$  wird dann so klein, daß es in Gl. (21a) ohne Bedeutung ist. Im Gegensatz dazu behält aber  $F$  einen endlichen Wert bei. Wird nun  $S$  nicht mehr benötigt, so ist aber  $\lambda_m$  nicht mehr festgelegt, damit frei wählbar und  $T$  somit undefiniert geworden.

Tabelle 7  
Wahre Temperatur  $T$  in  $^\circ\text{K}$  ( $\lambda = 0,66 \mu$ )

$\lambda_m (\mu)$	0,4	0,5	0,66	0,75
Gl. (21a)	1762	1738	1699 <sup>29)</sup>	1679

Diese Unsicherheit bei der Temperaturbestimmung dünner Flammen<sup>31)</sup> war der Anlaß zu der vorliegenden Untersuchung. Wir haben in Gl. (20) die von  $\lambda_m$  unabhängige Darstellung, was besonders in der Form der Gl. (20a) zum Ausdruck kommt, gefunden, müssen dafür aber eine  $\lambda$ -Abhängigkeit von  $f$  in Kauf nehmen.

Für die schwarze Temperatur  $S_\lambda$  gilt das gleiche wie für die Farbtemperatur. Das  $a_\lambda$  der Gl. (14) behält seinen Wert, unabhängig von der Wahl von  $\lambda_m$ , bei. Dagegen wird  $S_{\lambda_m}$  natürlich in seinem Wert stark verändert. Aus Gl. (14a) folgt direkt die Beziehung:

$$\frac{1}{S_{\lambda_m}^*} - \frac{1}{S_{\lambda_m}} = \frac{\lambda_m}{c_2} \ln(1 - e^{-D}) - \frac{\lambda_m^*}{c_2} \ln(1 - e^{-D^*}).$$

Für  $D^*$  ist dabei die in Anm. <sup>26)</sup> auf S. 408 angegebene Beziehung zu benutzen.

$$\frac{1}{S_{\lambda_m}^*} - \frac{1}{S_{\lambda_m}} = \frac{\lambda_m}{c_2} \ln(1 - e^{-D}) - \frac{\lambda_m^*}{c_2} \ln \left( 1 - e^{-D \left( \frac{\lambda_m}{\lambda_m^*} \right)^\beta \left[ 1 + \beta \left( \frac{\lambda_m}{\lambda_m^*} - 1 \right) + \gamma \left( \frac{\lambda_m}{\lambda_m^*} - 1 \right)^2 \right]} \right). \quad (26)$$

<sup>29)</sup> Dieser Wert ist durch die Wahl von  $\lambda = 0,66 \mu$  bedingt. In Abb. 5 gehört zur Messung dagegen die mittlere Wellenlänge  $\lambda = 0,62 \mu$ .

<sup>30)</sup> H. Behrens u. F. Rößler, Z. Naturforsch. 5a, 311 (1950).

<sup>31)</sup> H. Behrens u. F. Rößler, Z. Elektrochem. 61, 610 (1957).

Es ergibt sich also der gleiche Wert, als wenn man in Gl. (15) für  $\lambda$  einfach  $\lambda_m^*$  gewählt hätte. Man erkennt sofort, daß der Ausdruck für  $S_\lambda$  am einfachsten, nämlich zu Gl. (14a) wird, wenn man  $\lambda = \lambda_m$  wählt. Das ist der Grund, warum es zweckmäßig ist, zur Bestimmung der wahren Temperatur aus  $\frac{1}{S} - \frac{1}{F}$ , wofür  $S$  und  $F$  auf jeden Fall bei der gleichen Wellenlänge gemessen sein müssen,  $\lambda = \lambda_m$  zu wählen. Es erscheint dann in Abb. 6 nur eine Kurve für  $\frac{1}{S} - \frac{1}{F}$ . Für  $\frac{1}{T} - \frac{1}{F}$  würden für jedes  $\lambda$  andere Kurven zu verwenden sein (Gl. (20) und Abb. 4), falls man es nicht vorzieht, rechnerisch  $F$  auf  $\lambda_m$  zu beziehen. Das sich ergebende  $D$  gehört zu derjenigen Wellenlänge, für die  $S$  bestimmt worden war. Wir wollen an dieser Auffassung festhalten und  $\lambda_m$  stets zu  $0,66 \mu$  wählen. Im Prinzip wäre es aber auch umgekehrt denkbar,  $\lambda_m$  bei der Wellenlänge zu wählen, bei der  $F$  gemessen worden ist. Dann müßte  $S$  umgerechnet werden (Gl. (15)), bzw. würden in Abb. 6 mehrere Kurven für  $\frac{1}{T} - \frac{1}{S}$  auftreten.

### F. Wahre Temperatur

Als Ergebnis dieser Untersuchung ist also festzuhalten, daß die Farbtemperatur rußhaltiger Flammen von der Wellenlänge abhängig ist. In welcher Weise dann die Berechnung der wahren Temperatur zu erfolgen hat, sei an dem Beispiel der Messungen von Valentiner und Rössiger<sup>16)</sup> und derjenigen von Pearson und Pleasance<sup>17)</sup> an der Hefner-Kerze durchgeführt. Die Farbtemperaturen beider Autoren unterscheiden sich. Diese Diskrepanz war bisher unverständlich. Wir hatten auf S. 407 die mittlere Wellenlänge für beide Messungen bestimmt und verwenden nun diese Kenntnis. Die Ausgangsdaten<sup>32)</sup> sind also:

Tabelle 8  
Gemessene Daten

	Schwarze Temp.		Farbtemperatur		$\varepsilon$	Disper- sion $n_{\lambda_m}$
	$S$ (°K)	$\lambda$ ( $\mu$ )	$f$ (°K)	$\lambda$ ( $\mu$ )		
Becker <sup>4)</sup>	1490	0,643			+0,03	1,27
Valentiner-Rössiger <sup>16)</sup>			1840	0,49	+0,35	
Pearson-Pleasance <sup>17)</sup>			1897	0,60	+0,10	
Gl. (9)						

Die optische Dicke wird sich als so gering ergeben, daß wir mit den Näherungsgleichungen für kleine  $D$  arbeiten können. Dabei wollen wir zunächst einmal unter den Voraussetzungen der Arbeit<sup>1)</sup> rechnen, um die Ergebnisse den neu zu gewinnenden gegenüberzustellen. In Arbeit<sup>1)</sup> war gezeigt worden, wie aus der gemessenen schwarzen und der Farbtemperatur die wahre Temperatur gefunden werden kann. Man bildet die Differenz  $\frac{1}{S} - \frac{1}{F}$  und paßt sie in die Kurven für Farbtemperatur und schwarze Temperatur der

<sup>32)</sup> Die bisher für  $D$  und  $T$  zu Rechnungszwecken benutzten Werte werden verlassen und jetzt erst neu bestimmt.

Abb. 6 ein. Auf diese Weise erhält man zugleich  $D$  und  $\frac{1}{T} - \frac{1}{F}$  und damit schließlich  $T$ . Will man rechnerisch vorgehen, so hat man die dortigen drei Gleichungen zu benutzen, die hier noch einmal wiedergegeben seien. Zur  $D$ -Bestimmung wird zunächst das Farbemissionsvermögen  $p$  berechnet, das mit dem  $p$  von Gl. (16) identisch ist. Der gefundene  $D$ -Wert bezieht sich dann auf die Wellenlänge  $\lambda_m$ , für die  $S$  bestimmt worden war.

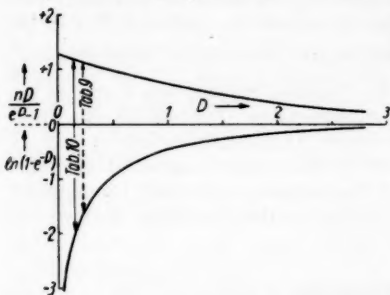


Abb. 6. Farb- und schwarze Temperatur als Funktion der optischen Dicke.

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{F} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{nD}{e^D - 1}$$

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{F} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \ln(1 - e^{-D})$$

$$\lambda_m = 0,66 \mu; \quad n = 1,27$$

↑ ↓ Meßwerte Valentiner, Rössiger

$$\frac{1}{F} - \frac{1}{S_{\lambda_m}} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \ln p, \quad (22^1)$$

$$D_1 = p \cdot e^{n\lambda_m}, \quad (24^1)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{F} + \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot n_{\lambda_m} \left(1 - \frac{D}{2}\right). \quad (28^1)$$

Es ergeben sich die Zahlen der Tab. 9.

Tabelle 9  
Nach Arbeit<sup>1)</sup> berechnete Werte

Zitat	Opt. Dicke $D_1$	wahre Temp. $T$ (°K)
<sup>16)</sup>	0,223	1680
<sup>17)</sup>	0,155	1721
<sup>1)</sup>	+0,068	-41
%	+36	-2,4

Die Unterschiede in  $D$  und  $T$ , die nach dieser Rechnung aus den Messungen beider Autoren folgen, sind also recht erheblich.

Eine solche Rechnung ist aber nach unserer jetzigen Erkenntnis unzulässig. Es müssen vielmehr die Farbtemperaturen vor der Auswertung auf die Wellenlänge  $\lambda_m = 0,66 \mu$  umgerechnet werden. Das leistet Gl. (23a). Das zahlenmäßig wesentlichste Glied in der großen Klammer ist  $n_{\lambda_m}$ . Da es im Endergebnis mit  $1 - \frac{D^2}{4}$  multipliziert erscheint, ist eine ungenaue Kenntnis von  $D$  nur von geringem Einfluß. Es ist also zulässig, die Korrektur von  $f$  mit  $D = 0,17$  zu berechnen. Ebenso muß die schwarze Temperatur umgerechnet werden nach Gl. (18d). Es ergeben sich die Werte der Tab. 10.

Man sieht, daß wegen der positiven  $\epsilon$ -Werte die Farbtemperaturen um 2,7 bzw. 0,9% größer geworden sind. Die Messungen der beiden Autoren unterscheiden sich weniger voneinander als in Tab. 8. Rechnet man mit diesen neuen Farbtemperaturen nun mittels der oben wiedergegebenen Gl. (22<sup>1</sup>), (24<sup>1</sup>) und (28<sup>1</sup>) weiter, so erhält man für  $D_1$  und  $T_1$  die Zahlen der Tab. 10. Die wahren Temperaturen  $T$  beider Messungen unterscheiden sich nur noch um 1,0% voneinander gegenüber den 2,4% der vorigen Tabelle. Die in der Literatur bisher bestehende Unsicherheit in bezug auf  $F$  und damit  $T$  ist also als beseitigt anzusehen. Auch der Unterschied in den  $D$ -Werten ist ver-

Tabelle 10  
Neu berechnete Werte

Zitat	Schwarze Temp. reduziert		Farbtemperatur reduziert		Wahre Temperatur			
	$S$ (°K)	$\lambda_m$ ( $\mu$ )	$F$ (°K)	$\lambda_m$ ( $\mu$ )	I. Näherung		II. Näherung	
					$D_I$	$T_I$	$D_{II}$	$T_{II}$
4)	1480	0,66	—	—	—	—	—	—
16)	—	—	1891	0,66	0,145	1715	0,152	1705
17)	—	—	1913	0,66	0,128	1732	0,128	1732
Mittel			1902	0,66	0,14	1723	0,14	1718
$\Delta$			22	—	+ 0,017	- 17	+ 0,024	- 27
%			1,6	—	+ 12	- 1,0	+ 17	- 1,6

ringert worden. Allerdings ist er mit 12% noch recht erheblich. Da  $D$  nach Gl. (28<sup>1</sup>) nur eine Korrekptionsgröße darstellt, ist  $T$  nur geringfügig von  $D$  abhängig. Andererseits reagiert  $D$  sehr empfindlich auf Änderungen der Größe  $F$ .

Die hier durchgeführte Rechnung läßt den Gang der Schritte klar erkennen. Wenn das jedoch nicht notwendig ist, kann direkt mit Gl. (20) bzw. deren Näherungen (22), (20a) oder (22a) und Gl. (14a) gerechnet werden.

$$\left( \frac{1}{f} - \frac{1}{S_{\lambda_m}} \right) \frac{c_2}{\lambda_m} = \ln(1 - e^{-D}) - \frac{D n_{\lambda_m}}{e^D - 1} \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right) \left\{ (s - 1) \left( 1 - \frac{\beta}{n_{\lambda_m}} \right) + (s + 1) \frac{\gamma}{n_{\lambda_m}} - D \frac{n_{\lambda_m}}{1 - e^{-D}} \right\} \right] \quad (27)$$

Gl. (27) stellt dann also die Bestimmungsgleichung für  $D$  dar, die numerisch oder nach den Methoden der Arbeit<sup>1)</sup> zu lösen ist. (Es wurde zunächst der Fall kleiner  $\varepsilon$  gewählt.) Für  $f$  ist die direkt gemessene Farbtemperatur, für  $\lambda$  die zugehörige Wellenlänge, für  $\lambda_m$  0,66  $\mu$  und für  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $n_{\lambda_m}$  sind die Werte der Gl. (10) einzusetzen. Dann erhält man direkt die Zahlen<sup>33)</sup>  $D_I$  und  $T_I$  der Tab. 10.

Nun zeigt es sich aber, daß  $\varepsilon = +0,35$  bereits so groß ist, daß es zweckmäßiger ist, mit den Gln. (20a) und (14a) zu rechnen. Es ergibt sich eine Gl. (27) entsprechende Gleichung, die zu  $D_{II}$  und  $T_{II}$  führt, die ebenfalls in der Tab. 10 angegeben sind. Es sind die genaueren Werte. Für die Werte<sup>17)</sup> reicht die I. Näherung aus. Sie wurden für die Mittelung aus dieser Spalte entnommen. Falls man die Genauigkeit der Farbtemperaturbestimmung von<sup>16)</sup> bzw. <sup>17)</sup> als gleichwertig ansieht, ergeben sich also die wahre Temperatur  $T$  der Amylacetatflamme zu 1720 °K und die Farbtemperatur  $F$  zu 1900 °K mit einer Genauigkeit von  $\pm 15^\circ$ , d. h. 1%. Die Messung ist dabei von den

<sup>33)</sup> In Arbeit<sup>1)</sup> war  $f = 1910$  °K (Pearson und Pleasance) und  $n = 1,47$  (aus direkter Absorptionsmessung in der Flamme) gewählt und die  $\lambda$ -Abhängigkeit von  $f$  nicht berücksichtigt worden. Es hatte sich  $D = 0,17$  und  $T = 1710$  °K ergeben. Damit waren die Messungen von Valentiner und Rössiger dann nicht verträglich. Diese Schwierigkeit ist also jetzt beseitigt.

Autoren in 2 cm Höhe über dem Dachtrande (der heißesten Stelle) ausgeführt worden. Eine Berücksichtigung des Temperaturgradienten<sup>34)</sup> ist unterblieben.

In Abb. 6 sind als Beispiel die Veränderungen der Werte von Valentiner<sup>16)</sup> eingetragen worden, die sie durch die Umrechnung erfahren. Der gestrichelte Pfeil gehört zu  $\lambda = 0,49 \mu$  und  $D = 0,22$  (Tab. 9) und führt damit zu einem gefälschten  $T$ . Nach Umrechnung auf  $\lambda = 0,66 \mu$  wird  $D = 0,15$  (Tab. 10), liefert den ausgezogenen Pfeil und das richtige  $T$ .

### G. Rußflammen allgemein

Liegt eine andere rußhaltige Flamme vor, so werden im allgemeinen Fall nicht genügend Daten zur Verfügung stehen, um eine solch ausführliche Rechnung durchführen zu können, wie es hier für die Amylacetatflamme geschah. Wenn jedoch zum Ausdruck gebracht wird, daß die  $n_\lambda$ -Werte im Sinn der Gl. (8) und Tab. 1 mit wachsender Wellenlänge kleiner werden, so genügt das bereits für die erste Näherung. Tab. 6 zeigte ja, daß der Gang der Farbtemperatur bereits durch Gl. (24), also  $\beta = \gamma = 0$ , angenähert wiedergegeben wird. Es wird daher erlaubt sein, für  $n$ ,  $s$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  mittlere Werte anzunehmen.

Für  $n$  sind Naeser und Pepperhoff bereits so vorgegangen. Aus den vorliegenden Messungen<sup>7)8)</sup> schlossen sie auf ein mittleres  $n = 1,20$ . Dieses legten sie einer Kurvenschar<sup>35)</sup> zugrunde, die sie mittels Gl. (27<sup>1)</sup> der Arbeit<sup>1)</sup> errechneten. Sieht man die Daten von Pepperhoff und Bähr<sup>9)</sup> im ultraroten Bereich durch, so erkennt man, daß Stearin ein mittleres Verhalten zeigt. Wir setzen also  $n = 1,12 - 0,45 \log \lambda$  (mit  $\lambda$  in  $\mu$  gemessen) für den Abfall im Ultraroten an. Im sichtbaren (für  $0,66 \mu$ ) ergibt sich nach dieser Formel und auch nach den Messungen<sup>7)8)</sup>  $n = 1,20$ . Die Anpassung geschieht an  $n = 1,12$  für  $1 \mu$  und  $n = 0,98$  für  $2 \mu$ . Das führt zu den Werten:

$$\beta = 0,43, \gamma = -0,04 \quad \text{und damit} \quad s = 1,67. \quad (28)$$

Als Bezugswellenlänge ist dabei natürlich wieder  $\lambda_m = 0,66 \mu$  gewählt worden. Da es sich jedoch nur um eine Anpassung an mittlere Werte handelt, genügt es,  $\gamma = 0$  zu setzen und  $\beta$  so zu wählen, daß es die Messungen bei 1 und  $2 \mu$  am besten wiedergibt (möglich bis  $\pm 0,01$  in  $n$ ). Dann werden:

$$\beta = 0,2, s = 1,4. \quad (29)$$

Mit diesen Werten (29) ergeben sich die folgenden numerischen Gleichungen, die für genaue und genäherte Lösungen getrennt gruppiert sind. Sie sind sämtlich durch einen Stern gekennzeichnet. Die Ziffer entspricht dem vorhergehenden Text. Die Temperaturen sind darin in  $^\circ\text{K}$  und die Wellenlängen in  $\mu$  zu messen.

$$n_\lambda \cdot l = \frac{D}{\lambda^{1,4}} (0,45 + 0,17 \lambda), \quad (7^*)$$

$$n = \frac{1,12 + 0,12 \lambda}{0,80 + 0,30 \lambda}, \quad (8^*)$$

<sup>34)</sup> F. Rößler u. H. Pösch, *Optik* **13**, 411 (1956).

<sup>35)</sup> Diese Kurvenschar dient zur bequemen Berechnung der wahren Temperatur aus schwarzer und Farbtemperatur nach dem in Arbeit<sup>1)</sup> angegebenen Verfahren.

$$1000 \left( \frac{1}{S_\lambda} - \frac{1}{S_{0,66}} \right) = 0,11 \log (1 - e^{-D}) - 0,16 \lambda \log (1 - e^{-\lambda \cdot l}), \quad (15^*)$$

$$1000 \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{f} \right) = \frac{D(0,044 + 0,0047 \lambda)}{\lambda^{0,4} \left( e^{\frac{D}{\lambda^{1,4} [0,45 + 0,17 \lambda]}} - 1 \right)}. \quad (20^*)$$

Angenäherte Werte ergeben für kleines  $\varepsilon = \frac{0,66}{\lambda} - 1$  die Gleichungen:

$$n = 1,04 + \frac{0,11}{\lambda}, \quad (8a^*)$$

$$\frac{1000}{\lambda S_\lambda} = \frac{p^*}{10} + \frac{q^*}{10} \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{r^*}{10 \cdot 2} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \quad (18^*/19^*)$$

mit

$$\frac{p^*}{10} = -0,16 \log (1 - e^{-D}) + 0,042 \frac{D}{e^D - 1} (2 + \varphi),$$

$$\frac{q^*}{10} = \frac{100}{T} - 0,055 \frac{D}{e^D - 1} (1 + \varphi),$$

$$\frac{r^*}{10 \cdot 2} = 0,018 \frac{D}{e^D - 1} \varphi,$$

$$\varphi = -0,33 + 1,2 \frac{D}{1 - e^{-D}};$$

$$\frac{1000}{\lambda S_\lambda} - \frac{1000}{0,66 \cdot S_{0,66}} = \left( \frac{1}{\lambda} - 1,51 \right) \cdot \left( \frac{q^*}{10} + \frac{r^*}{10 \cdot 2} \left[ \frac{1}{\lambda} + 1,51 \right] \right), \quad (18c^*)$$

$$\frac{1000}{f} = \frac{q^*}{10} + \frac{r^*}{10} \cdot \frac{1}{\lambda}, \quad (18a^*)$$

$$1000 \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{f} \right) = 0,055 \cdot \frac{D}{e^D - 1} \left[ 1 + \left( \frac{0,66}{\lambda} - 1 \right) \varphi \right]. \quad (22^*)$$

Für kleine  $D$  werden schließlich:

$$1000 \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{f} \right) = \lambda \cdot \frac{0,10 + 0,011 \lambda}{1,03 + 0,39 \lambda}. \quad (20a^*)$$

Für kleine  $D$  und  $\varepsilon$ :

$$1000 \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{f} \right) = 0,073 \lambda + 0,055. \quad (22a^*)$$

## H. Nomogramme

Für die praktisch wichtigsten Operationen seien noch Nomogramme mitgeteilt. Die Nomogramme sind im Original  $50 \times 50 \text{ cm}^2$  gezeichnet worden. Dadurch ist der Einfluß von Zeichenfehlern stark reduziert worden. Die Grenzen der Genauigkeit sind vielmehr gegeben einmal durch die Wahl der

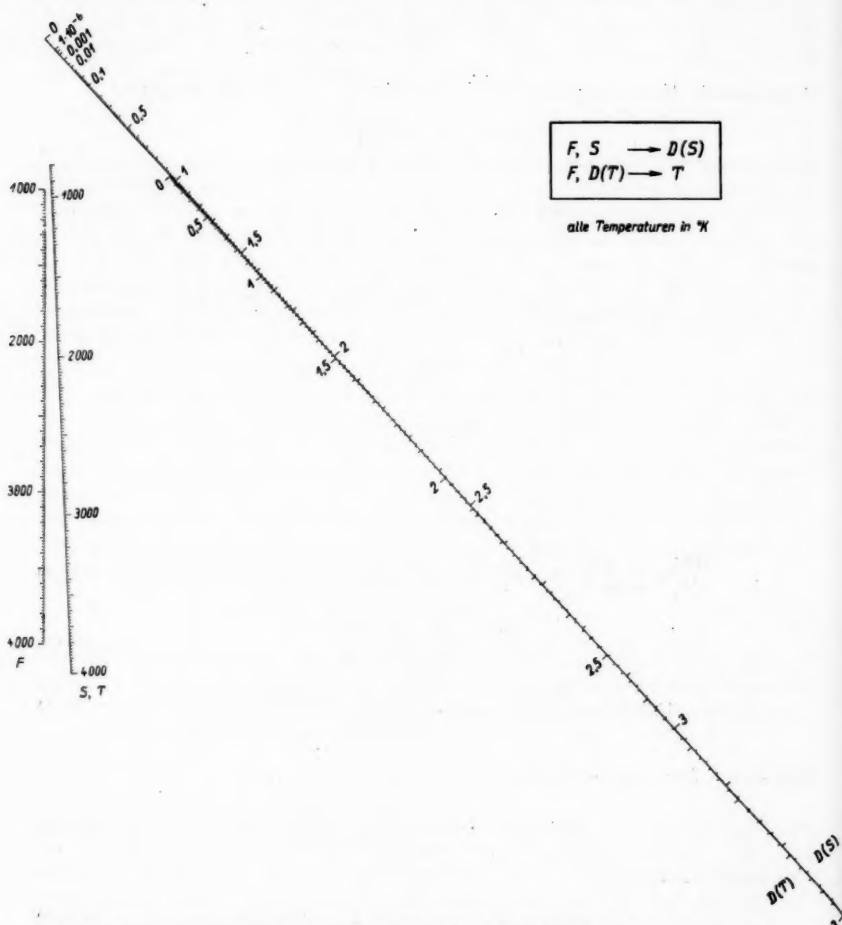


Abb. 7. Nomogramm zur Bestimmung der optischen Dicke  $D$  und der Temperatur  $T$ .  
 $F - S \rightarrow D(S)$ ;  $D(T) - F \rightarrow T$

Durchschnittswerte (29) und zum anderen durch die nur angenäherte Gültigkeit der Ausgangsgleichung (22) bzw. (23). Mit Ausnahme der sowieso komplizierten  $D$ -Skalen sind alle Skalen linear, was für die Zeichnung und Ablesung einen Vorteil bedeutet. Als Temperaturen wurden wie in der gesamten Arbeit nur die absoluten Werte verwendet, die Wellenlänge wird in  $\mu$  gemessen.

In Abb. 7 sind zur  $D$ - und  $T$ -Bestimmung 2 Nomogramme in einem zugleich dargestellt. Aus den auf  $\lambda_m = 0,66 \mu$  bezogenen Temperaturen  $F$  und  $S_{\lambda_m}$  wird durch Verlängern beider Werte bis  $D(S)$  die optische Dicke bestimmt. Mit demselben  $D$ -Wert wird dann natürlich an anderer Stelle in die Skala  $D(T)$  eingegangen. Dann liegt auf der Verbindungsgeraden von  $F$  mit  $D(T)$  die gesuchte wahre Temperatur  $T$ . Die  $D$ -Skalen entsprechen den Kurven der Abb. 6. Das Nomogramm ist so ausgelegt worden, daß mittlere  $D$ -Werte mit größter Genauigkeit abgelesen werden können. Für kleine  $D$ -Werte existieren bequeme Näherungsformeln (22<sup>1</sup>) mit (24<sup>1</sup>) und (28<sup>1</sup>) auf S. 412, die eine einfache Rechnung zulassen. Noch größere Dicken als 3 sind andererseits schon benachbart dem schwarzen Körper. Den Nomogrammen liegen die beiden folgenden Gleichungen zugrunde, wobei die erste aus der Differenz der Gl. (21) und (14a) entstanden ist:

$$\frac{1}{S_{\lambda_m}} - \frac{1}{F} = -\frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \ln p = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \left[ \frac{n_{\lambda_m} D}{e^D - 1} - \ln(1 - e^{-D}) \right], \quad (30)$$

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{F} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{n_{\lambda_m} D}{e^D - 1}. \quad (21)$$

Die Umrechnung der für  $\lambda$  gemessenen Farbtemperatur  $f$  in  $F$ , das sich auf  $\lambda_m = 0,66 \mu$  bezieht, leistet das Nomogramm der Abb. 8. Zugrunde liegen Gl. (18a) und (19):

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{F} = r^* \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_m} \right). \quad (31)$$

Die Form dieser Gleichung legt ein Nomogramm in Form eines Strahlenbüschels wie in Abb. 7 nahe. Dann würde aber der vorwiegend interessierende Bereich  $\lambda \sim \lambda_m$  im Unendlichen liegen. Es wurde daher eine Umformung durch Einführung der Differenz  $\Delta f = F - f$  vorgenommen. Die Gleichung wird dann zu:

$$\frac{\Delta f}{f(f + \Delta \lambda)} = r^* \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_m} \right) = \frac{\lambda_m}{c_2} \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right) \frac{n_{\lambda_m} D}{e^D - 1} \varphi \quad (32)$$

mit

$$\varphi = \frac{n_{\lambda_m} D}{1 - e^{-D}} - (s - 1) \left( 1 - \frac{\beta}{n_{\lambda_m}} \right) \quad (\text{für } \gamma = 0).$$

Die Skalen  $a$  und  $b$  sind willkürlich. Sie dienen nur zur Fixierung von Punkten, die später eliminiert werden. Die  $\lambda$ -Skala reicht von 0,35 bis 1,2  $\mu$  und ent-

spricht damit einem durch die Reihenentwicklung (Übergang von Gl. (20) zu (22)) bedingten Fehler von 2% für diese äußersten Wellenlängen.  $r^*(D)$  ist zwischen  $D = 0$  und 1 so wenig veränderlich, daß diese Werte durch einen gemeinsamen Punkt dargestellt werden konnten. Bei einer Benutzung hat man folgendermaßen vorzugehen: Man verbindet den  $f$ -Wert der Skala  $f_I$  mit dem  $\lambda$ -Wert und findet  $a$ .  $a$  wird verbunden mit  $D$  und liefert  $b$ . Verbindet man schließlich  $f$  auf der Skala  $f_{II}$  mit  $b$ , so kann man  $\Delta f$  ablesen.  $F$  errechnet sich dann zu  $f + \Delta f$ .

Am Beispiel der Amylacetatflamme sei das Vorgehen noch einmal konkret erläutert. Wir gehen aus von den gemessenen Daten der Tab. 8. Zunächst wird  $D$  mittels Nomogramm Abb. 7 angenähert bestimmt.  $S = 1490^\circ\text{K}$  und  $f_{0,49} = 1840^\circ\text{K}$  (Valentiner<sup>16</sup>) führt zu  $D \sim 0,17$ . Unter Verwendung dieses  $D$ -Wertes wird  $f$  mittels des Nomogrammes Abb. 8 in  $F$  umgerechnet.  $f = 1840^\circ\text{K}$  und  $\lambda = 0,49 \mu$  ergeben  $a = 31,5$ . Dieses  $a$  und  $D \sim 0,17$  ergeben  $b = 38,7$ . Dieses  $b$  und  $f = 1840^\circ\text{K}$  ergeben  $\Delta f = +60^\circ$ . Damit wird die umgerechnete Farbtemperatur  $F = 1900^\circ\text{K}$ . Wird mit diesem Wert noch einmal in Nomogramm Abb. 7 eingegangen, ergibt sich dieses Mal zusammen mit  $S_{0,66} = 1480^\circ\text{K}$ <sup>36</sup>) die optische Dicke auf der  $D(S)$ -Skala zu:  $D = 0,12$  und schließlich aus  $F = 1900^\circ\text{K}$  und diesem  $D$  (auf der anderen  $D(F)$ -Skala) die wahre Temperatur  $T = 1730^\circ\text{K}$ .

Vergleicht man diese wahre Temperatur mit  $T_I$  der Tab. 10, so zeigt sich, daß die Abweichung nur 0,85% beträgt. Entsprechend beträgt sie für  $F$  0,48%. Diese Abweichung ist zum größten Teil bedingt durch die Verwendung der mittleren Werte für  $s$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , die sich ja von denjenigen der Amylacetatflamme unterscheiden; zum geringeren Teil ist die Abweichung durch die Ungenauigkeit der Ablesung bedingt<sup>37</sup>).

Die entsprechenden Zahlen für die Messungen von Pearson<sup>17</sup>) lauten:  $D \sim 0,12$ ;  $a = 27,0$ ;  $b = 39,6$ ;  $\Delta f = +20$ ;  $F = 1917^\circ\text{K}$ ;  $D = 0,10$ ;  $T = 1740^\circ\text{K}$ . Die von Naeser<sup>9</sup>) mit seinem Biopix bestimmte Farbtemperatur der Hefner-Flamme  $f_{0,58} = 1833^\circ\text{K}$  rechnet sich über  $a = 27,5$ ;  $b = 39,5$ ;  $\Delta f = +22$  um auf  $F = 1855^\circ\text{K}$ .

Für die im folgenden angegebene Umrechnung der schwarzen Temperatur ist die Kenntnis der Farbtemperatur bei anderen Wellenlängen als  $\lambda_m$  von Bedeutung. Um eine solche Umrechnung von  $F$  in  $f$  vornehmen zu können, ist noch eine zusätzliche Skala  $F$  angebracht worden. Es liegt die Gleichung zugrunde:

$$\frac{\Delta f}{F(F - \Delta f)} = \frac{r^*}{\lambda_m} \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right).$$

Man geht dann so vor: Man verbindet den  $F$ -Wert auf der Skala  $f_I$  mit dem  $\lambda$ -Wert und findet  $a$ . Dann wird  $a$  mit  $D$  verbunden und liefert  $b$ . Verbindet man schließlich  $F$  auf der Skala  $F$  (Unterschied gegenüber S. 418 oben!) mit  $b$ , so kann man  $\Delta f$  ablesen.  $f$  errechnet sich dann zu  $F - \Delta f$  (Unterschied gegenüber S. 418 oben!).

<sup>36</sup>) Die Bestimmung von  $S_{0,66}$  wird auf S. 420 durchgeführt.

<sup>37</sup>) Mehrere  $\Delta f$ -Werte wurden dem Nomogramm im Originalmaßstab entnommen und außerdem berechnet. Die Abweichungen betrugen lediglich bis zu 0,3% von  $F$ .

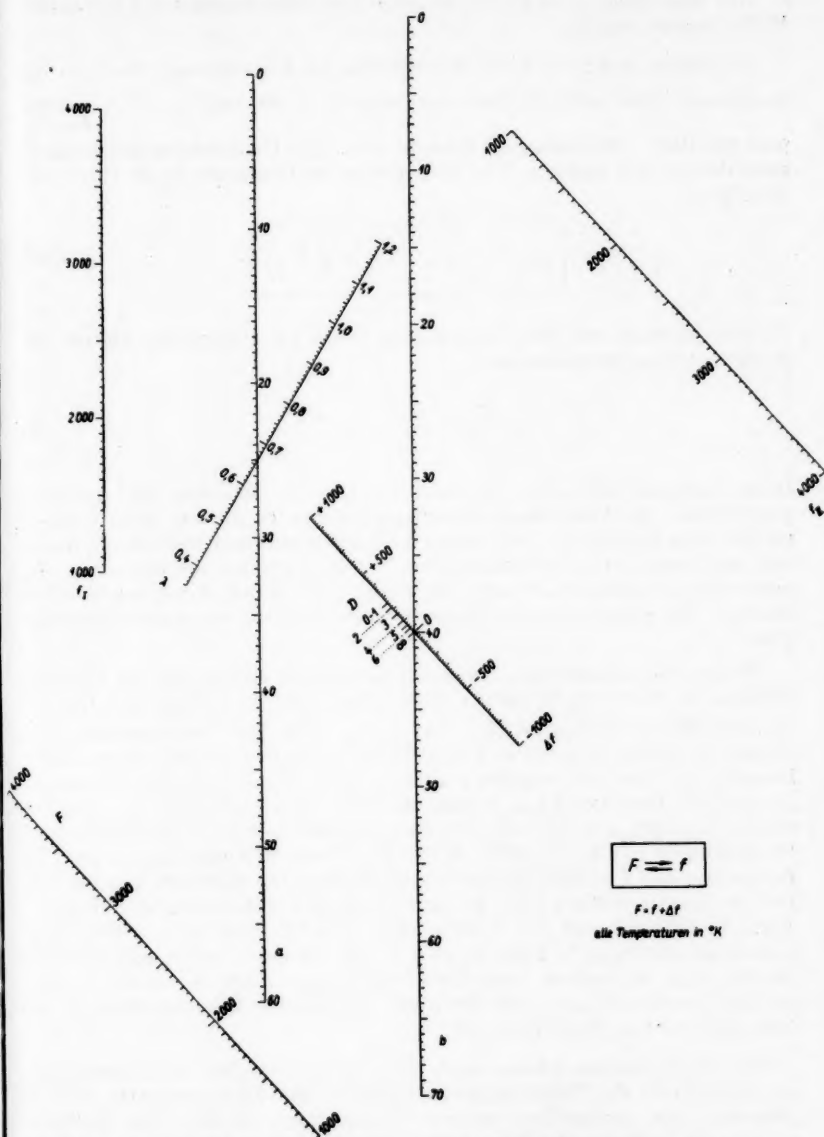


Abb. 8. Umrechnung der Farbtemperatur auf andere Wellenlängen.  $f_I - \lambda \rightarrow a$ ;  $a - D \rightarrow b$ ;  $f_{II}$  (bzw.  $F$ )  $- b \rightarrow \Delta f$

Auf dem Wege  $f_{\lambda} \rightarrow F \rightarrow f_{\lambda}$  ist also eine Umrechnung von  $f$  auf andere Wellenlängen möglich.

Schließlich wurde noch ein Nomogramm zur Umrechnung von  $S_{\lambda}$  in  $S_{\lambda_m}$  gezeichnet. Dazu muß die Farbtemperatur  $\bar{f}$  für die aus  $\frac{2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_m}$  reziprok gemittelte Wellenlänge  $\lambda$  bekannt sein. Die Umrechnungsgleichung ist dann durch (18d) gegeben. Und zwar gilt sie im Gegensatz zu Gl. (31) exakt für alle  $\lambda$ .

$$\boxed{\frac{1}{\lambda S_{\lambda}} - \frac{1}{\lambda_m S_{\lambda_m}} = \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_m} \right) \cdot \frac{1}{\bar{f}_{\lambda}}} \quad (18d)$$

Für das Rechnen mit dem Nomogramm wurde die Umformung auf die folgende Gleichung vorgenommen.

$$\frac{\Delta S}{S - \Delta S} = \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} - 1 \right) \frac{\delta}{S + \delta} \quad (33)$$

Dabei bedeuten  $\Delta S = S_{\lambda} - S_{\lambda_m}$  und  $\delta = f_{\lambda} - S_{\lambda}$ . Man hat also zunächst  $\delta$  zu bilden. Die Verbindung des entsprechenden Punktes in Abb. 9 mit  $S$  auf der Skala  $S_I$  liefert  $c$ .  $c$  wird dann mit  $\lambda$  verbunden und ergibt  $d$ .  $\Delta S$  findet man dann mittels der Verbindungslinie von  $d$  mit  $S$  auf der Skala  $S_{II}$ .  $S_{\lambda_m}$  ergibt sich schließlich zu:  $S - \Delta S$ . Die Skalen  $c$  und  $d$  sind ebenfalls willkürlich beziffert. Sie dienen nur zur Fixierung eines Punktes, der später eliminiert wird.

Wenn also beispielsweise Naeser<sup>9)</sup> mit seinem Bioptix an der Hefner-Flamme ein  $S = 1423$  °K für  $\lambda = 0,58 \mu$  bestimmt, so rechnet sich das folgendermaßen auf  $0,66 \mu$  um.  $\lambda = 0,62 \mu$ .  $f_{0,62}$  wird Abb. 8 entnommen. Verwenden wir gemäß Tab. 10 ein  $F = 1902$  °K, so ergibt  $\lambda = 0,62 \mu$  ein  $a = 26,3$ . Dieses  $a$  und  $D = 0,17$  ergeben  $b = 39,7$ . Dieses  $b$  und  $F = 1902$  °K ergeben  $\Delta f = +17^{\circ}$ . Damit wird  $f_{0,62} = 1885$  °K. Abb. 9 liefert uns mit  $S_{0,58} = 1423$  °K und  $\delta = f_{0,62} - S_{0,58} = 462^{\circ}$ :  $c = 8,8$ . Dieses  $c$  liefert mit  $\lambda = 0,62 \mu$  ein  $d = 36,2$ . Dieses  $d$  ergibt mit  $S_{0,58} = 1423$  °K ein  $\Delta S = +48$ . Also wird  $S_{0,66} = 1375$  °K. Dieses  $S_{0,66}$  und  $F = 1855$  °K führen schließlich zu  $D = 0,05$  und  $T = 1690$  °K. Der Beckersche Wert  $1490$  °K für die schwarze Temperatur der Hefner-Kerze bezieht sich auf  $\lambda = 0,643 \mu$ .  $F = 1900$  °K führt zu  $\delta = 410$ , damit zusammen mit  $S_{0,643} = 1490$  °K zu  $c = 7,8$ . Dieses  $c$  liefert mit  $\lambda = 0,643$  ein  $d = 35,3$ . Schließlich folgt daraus mit  $S_{0,643} = 1490$  °K ein  $\Delta S = +10^{\circ}$  und das gesuchte  $S_{0,66} = 1480$  °K sogar in genauer Übereinstimmung mit dem gerechneten Wert (Tab. 10).

Die Nomogramme können auch dazu benutzt werden, zu überschlagen, wie weit durch die Wellenlängenabhängigkeit der Farbtemperatur frühere Messungen zu veränderten wahren Temperaturen führen. Die Farbtemperatur der Rußspitze der Benzolflamme wurde bei  $\lambda = 0,48 \mu$  gemessen<sup>30)31)</sup>. Daher müssen die in der dortigen Tab. 1 angegebenen Farbtemperaturen  $F$  um  $\sim 120^{\circ}$  und die wahren Temperaturen  $T$  um  $\sim 60^{\circ}$  erhöht werden.

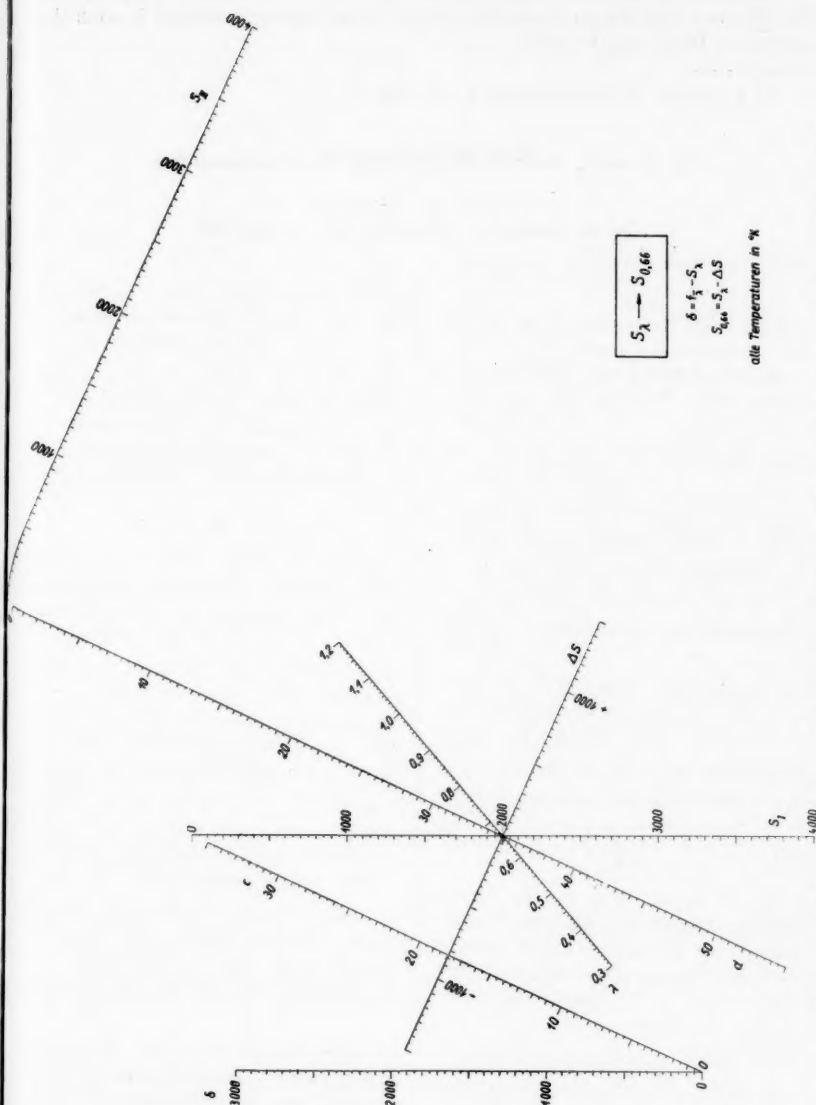


Abb. 9. Umrechnung der schwarzen Temperatur auf  $\lambda = 0,66 \mu$ .  $\delta - S_{II} \rightarrow c$ ;  $c - \lambda \rightarrow d$ ;  $S_{II} - d \rightarrow .18$

Ebenso erhöhen sich in Abb. 11 von <sup>38)</sup> die Farb- und wahren Temperaturen der Flamme von Nitroglycerin-Pulver (die nicht schwarz strahlt) je nach der optischen Dicke um 70–180°.

<sup>38)</sup> F. Rößler, Z. angew. Physik 6, 175 (1954).

St. Louis, Deutsch-französisches Forschungsinstitut.

Bei der Redaktion eingegangen am 14. März 1959.

And  
mu  
12  
Arm  
E.  
sel  
Me  
res  
25  
Bar  
Er  
we  
11  
Beh  
Ba  
zw  
El  
Ro  
bi  
Ber  
Au  
st  
Bit  
W  
h  
sc  
4,  
Bo  
K  
u  
4,  
Bu  
C

## Namenregister 1959

### 7. Folge, Band 3—4

#### A

Andrä, W., Jena: Magnetische Pulvermuster bei höheren Temperaturen. Mit 12 Abbildungen. **3**, 334.

Armbruster, P., Maier, H., Leibnitz, E. und Zimmer, E., München: Wechsellichtmethode zum Nachweis und zur Messung der Linienbreite des Natriumresonanzlichtes. Mit 12 Abbildungen. **4**, 251.

#### B

Barth, G. u. Maier, W., Freiburg/Br.: Empfindlichkeit und natürliche Nachweisgrenze beim Nickelbolometer. Mit 11 Abbildungen. **3**, 260.

Behringer, J. u. Brandmüller, J., Bamberg: Über den Zusammenhang zwischen der Schwingungsstruktur der Elektronenbandenspektren und dem Resonanz-Raman-Effekt. Mit 10 Abbildungen. **4**, 234.

Bertoldi, W. u. Kleint, Chr., Leipzig: Äußere Feldemission von ZnS-Einkristallen. Mit 5 Abbildungen. **4**, 388.

Bittel, H. u. Westerboer, I., Münster-Westf.: Kopplungen zwischen Barkhausen-Sprüngen als Folge magnetischer Nachwirkung. Mit 7 Abbildungen. **4**, 203.

Bopp, F., München: Bemerkungen zur Konforminvarianz der Elektrodynamik und der Grundgleichungen der Dynamik. **4**, 96.

Buchdahl, H. A., Tasmania (Australia): Über Approximationen der Zustands-

gleichung eines Fermi-Dirac-Gases. **3**, 345.

Bucka, H., Kopfermann, H. u. Otten, E. W., Heidelberg: Bestimmung der Kernquadrupolmomente der radioaktiven Isotopen  $Cs^{135}$  und  $Cs^{137}$ . Mit 9 Abbildungen. **4**, 39.

Brandmüller, J., Bamberg: Siehe Behringer, J., **4**, 234.

Brandmüller, J. u. Glatzer, G., Bamberg: Ramanspektroskopischer Nachweis von Pyridin in verschiedenen Lösungsmitteln. Mit 1 Abbildung. **4**, 228.

Braun, E., Stuttgart: Siehe Köster, W., **4**, 66.

Brunner, W., Zeuthen: Zur Theorie der Absättigung der Kernkräfte. Mit 6 Abbildungen. **3**, 137.

Brunner, W., Zeuthen: Zur Absättigung der Kernkräfte. Mit 2 Abbildungen. **3**, 233.

#### C

Calder, J. van u. Fröhlich, W., Münster-Westf.: Untersuchungen an Elektreten aus Karnaubawachs und die Entstehung ihrer Heteroladung. Mit 9 Abbildungen. **4**, 216.

#### D

Deradeo, I., Lütgens, G. u. Schmitz, N., München: Über die Auswertung von Blasenkammeraufnahmen und experimentelle Ergebnisse zur  $\pi$ -Meson-Proton-Streuung. Mit 14 Abbildungen. **4**, 103.

Dietrich, I., Karlsruhe: Untersuchungen zum kurzen Abreißbogen an schwach belasteten elektrischen Kontakten. Mit 10 Abbildungen. **4**, 167.

## E

Eggert, J., Zürich: Zur spektralen Empfindlichkeit photographischer Schichten. Mit 2 Abbildungen. **4**, 140.

Ermisch W. u. Seiwert, R., Berlin: Berichtigung zur Arbeit: „Die Depolarisation der Natrium-Resonanzfluoreszenz“. Ann. Phys. (7), **2**, 393 (1958). **3**, 427.

## F

Faessler, A. u. Krämer, H., München: Über die Existenz der Oxydationsstufen  $\text{Si}_2\text{O}$ ,  $\text{SiO}$  und  $\text{Si}_2\text{O}_3$ . Mit 2 Abbildungen. **4**, 263.

Flietner, H., Berlin-Adlershof: Oberflächenleitfähigkeit unter Berücksichtigung der Streuung der Ladungsträger an der Oberfläche bei kleinen Bandverbiegungen. Mit 15 Abbildungen. **3**, 396.

Flietner, H., Berlin-Adlershof: Feldeffekt und Reaktionen an der Oberfläche von Germanium. Mit 11 Abbildungen. **3**, 414.

Fraunberger, F., München: Über einen Vorschlag, Phasenumwandlungen bei hohen Drucken zu messen. Mit 3 Abbildungen. **4**, 225.

Friedrich, J., Berlin: Zur Auswertung seitlicher Beobachtungen an zylindrischen Bögen. Mit 1 Abbildung. **3**, 327.

Fries, D., Freiberg/Br.: Siehe Karolus, A. **4**, 269.

Fröhlich, W., Münster/Westf.: Siehe Calker, J. van **4**, 216.

## G

Gerstenberger, D., Marburg/Lahn: Siehe Vogt, E. **4**, 145.

Glatzer, G., Bamberg: Siehe Brandmüller, J. **4**, 228.

Groth, W. u. Weyssenhoff, H. v., Bonn: Photochemische Bildung organischer Verbindungen aus Mischungen einfacher Gase. Mit 3 Abbildungen. **4**, 69.

## H

Hartnagel, W., Münster/Westf.: Der Einfluß von Krümmung und Material einer Kante auf die Lichtbeugung. I. Mit 18 Abbildungen. **4**, 188.

Hettner, G. u. Wagner, H., München: Fourier-Analyse des elektrischen Mikrofeldes in einem Plasma I. Mit 3 Abbildungen. **4**, 89.

Hess, S., Rostock: Siehe Tischer, M. **3**, 113.

## I

Inthoff, W., Mainz: Anwendung eines einfachen Variationsverfahrens auf die Bindungsenergie leichter Kerne. **3**, 220.

Intonti, R. u. Lais, A., Rom: Die effektive Breite einer Linie als Maß des photographischen Effektes. Mit 8 Abbildungen. **4**, 78.

## K

Kästner, S., Berlin-Adlershof: Zur Theorie der Relaxation. III. Die Berücksichtigung mikroskopischer Trägheitseffekte im Rahmen der statistisch-thermodynamischen Theorie. **3**, 82.

Kakuschadse, T. I., Tbilissi: Die Satelliten  $K$  und  $K\beta'$  der Linien des Röntgenspektrums. Mit 6 Abbildungen. **3**, 352.

Kalkuhl, A., Stuttgart: Siehe Scheil, E. **4**, 58.

Kappler E. u. Pampus, G., Münster-Westf.: Über die Lichtstreuung an NaCl-Kristallen. Mit 15 Abbildungen. **4**, 178.

Karolus A., und Fries, D., Freiberg/Br.: Eine neue Anordnung zur Bestimmung

der  
bild

Klan  
skal  
loid

Klein  
4, 5

Klitz  
Bra  
men  
Kol

Knap  
schw  
Mul  
gem  
gra

Köste  
Man  
mit  
4, 6

Kopf  
Buc

Kräme  
A. 4

Kran  
Übe  
hau  
4, 8

Kühn  
sche  
Mit

Lais,

Land  
kroi  
Prü  
Mit

Lebo  
bin

Lore  
G. M

Lütg  
I. 4

der Lichtgeschwindigkeit. Mit 11 Abbildungen. 4, 269.

Klante, K., Münster/Westf.: Zur Beugung skalärer Wellen am Rotations-Paraboloid. Mit 1 Abbildung. 3, 171.

Kleint, Chr., Leipzig: Siehe Bertoldi 4, 388.

Klitzing, K. H. von, u. Pietzcker, A., Braunschweig: Ferromagnetische Elementarbereiche und Gitterstörungen bei Kobalt. Mit 15 Abbildungen. 4, 48.

Knapcz, G., Budapest: Notiz über die schwachen affinen Erhaltungssätze der Multimomente im Rahmen eines allgemein-relativistisch-kovarianten Lagrange-Formalismus. 3, 340.

Köster, W. u. Braun, E., Stuttgart: Über Mangan-Arsen-Antimon-Legierungen mit Invarcharakter. Mit 4 Abbildungen. 4, 66.

Kopfermann, H., Heidelberg: Siehe Bucka, H. 4, 39.

Krämer, H., München: Siehe Faessler, A. 4, 263.

Kranz, J. u. Schauer, A., München: Über das Vorkommen negativer Barkhausen-Sprünge. Mit 16 Abbildungen. 4, 84.

Kühn, B., Dubna/Moskau: Oszillographische Messungen an stromstarken Funken. Mit 27 Abbildungen. 3, 241.

L

Lais, A., Rom: Siehe Intonti, R. 4, 78.

Landwehr, R., Menden/Sauerland: Mikroiinterferenzen als Hilfsmittel zur Prüfung der Form asphärischer Flächen. Mit 13 Abbildungen. 4, 154.

Lebowsky, F., Hamburg: Siehe Steubing, W. 4, 360.

Lorenzen, K., München: Siehe Schwab, G. M. 4, 36.

Lütgens, G., München: Siehe Deradeo, I. 4, 103.

M

Mann, W., Leipzig: Halleffektmessung an Magnetit und einem Nickelferrit mit Eisenüberschuß. Mit 3 Abbildungen. 3, 122.

Maier, H., u. Leibnitz, E., München: Siehe Armbruster, P. 4, 251.

Maier, W., Freiburg/Br.: Siehe Barth, G. 3, 260.

Morgenroth, H., Berlin: Über die Elektrophorese in Argon-Quecksilber-Niederdruckentladungen. Mit 16 Abbildungen. 3, 373.

Moser, H., u. Schulz, H., München: Die Eigendruckverbreiterung der Cs-Linie 4555 Å. Mit 6 Abbildungen. 4, 243.

N

Neumann, W., u. Reimann, H., Berlin: Über eine Beobachtung des Elektronen-Atom-Stoßkontinuums in elektrodenstabilisierten Quecksilberhochdruckbogen. Mit 6 Abbildungen. 3, 211.

O

Ortmann, H., Liebenwalde: Siehe Riehl, N. 4, 3.

Otten, E. W., Heidelberg: Siehe Bucka, H. 4, 39.

P

Pampus, G., Münster/Westf.: Siehe Kappler, E. 4, 178.

Papapetrou A., u. Treder, H., Berlin: Zur Frage der Existenz von singularitätsfreien Lösungen der allgemein-relativistischen Feldgleichungen, die Teilchenmodelle darstellen können. Mit 4 Abbildungen. 3, 360.

Pietzcker, A., Braunschweig: Siehe Klitzing, K. H. von 4, 48.

## R

- Raab, J., Berlin-Adlershof: Siehe Rabenhorst, H. 4, 352.
- Rabenhorst, H., u. Raab, J., Berlin-Adlershof: Dielektrische Eigenschaften von Halbleitern. Mit 7 Abbildungen. 4, 352.
- Rawer, K., u. Suchy, K., Breisach: Longitudinal- und Transversal-Wellen im Lorentz-Plasma. Mit 7 Abbildungen. 3, 155.
- Reimann, H., Berlin: Siehe Neumann, W., 3, 211.
- Riehl, N., u. Ortmann, H., München und Liebenwalde: Über die Struktur von Leuchtzentren in aktivatorhaltigen Zinksulfidphosphoren. Mit 9 Abbildungen. 4, 3.
- Röblier, F., St. Louis: Die Verteilungstemperatur von Rußflammen. Mit 9 Abbildungen. 4, 396.
- Rompe, R., u. Rother, H., Berlin: Über das Verhalten eines Plasmas bei schnellen Zustandsänderungen. Mit 9 Abbildungen. 3, 28.
- Rose, E., Bonn: Spannungszusammenbruch an schnellen Funken. Mit 16 Abbildungen. 4, 15.
- Rother, H., Berlin: Theorie der Diffusionswellen. I. (Laufende Schichten in Niederdruckentladungen.) Mit 10 Abbildungen. 4, 373.
- Rother, H., Berlin: Siehe Rompe, R. 3, 28.
- Ruske, W., Jena: Dünne Nickelschichten mit sehr großer Koerzitivkraft und hohem Energieprodukt. Mit 4 Abbildungen. 3, 323.

## S

- Saliè, N., Leipzig: Berechnung der tiefsten  $^3P$ ,  $^1D$ - und  $^1S$ -Terme von  $C$ ,  $N^+$ ,  $O^{++}$ ,  $F^+$ ,  $N^{++}$  mit Hilfe des Variationsverfahrens. Mit 3 Abbildungen. 3, 48.

- Schauer, A., München: Siehe Kranz, J., 4, 84.
- Scheil, E., Wachtel, E., u. Kalkuhl, A., Stuttgart: Magnetische Untersuchungen an Kupfer-Eisen-Legierungen. Mit 6 Abbildungen. 4, 58.
- Schmitz, N., München: Siehe Deradeo, I. 4, 103.
- Scholz, A., Berlin: Photochemische Erscheinungen in sensibilisierten  $AgCl$ -Kristallen bei der Temperatur von  $-253^\circ C$ . Mit 15 Abbildungen. 3, 298.
- Schulz, G., Berlin-Adlershof: Kritik des von Neumannschen Beweises gegen die Kausalität in der Quantenmechanik. 3, 94.
- Schulz, H., München: Siehe Moser, H. 4, 243.
- Schwab, G. M., u. Lorenzen, K., München: Ramanspektroskopische Untersuchungen zur Assoziation von Thioessigsäure. Mit 1 Abbildung. 4, 36.
- Seiwert, R., Berlin: Siehe Ermisch, W., 3, 427.
- Stecker, K., Halle/Saale: Über die Halbleitereigenschaften des Kupferoxyduls. XII. Die Leitfähigkeit des Kupferoxyduls innerhalb des Existenzgebietes bei hohen Temperaturen im Bereich kleiner Drucke. Mit 12 Abbildungen. 3, 55.
- Stecker, K., Halle/Saale: Über die Halbleitereigenschaften des Kupferoxyduls. XIII. Leitfähigkeitsmessungen an Kupferoxydul im Existenzgebiet bei Störung des thermodynamischen Gleichgewichts. Mit 6 Abbildungen. 3, 70.
- Steubing, W., u. Lebowsky, F., Hamburg: Die Heliumlinien unter dem Einfluß senkrecht gekreuzter elektrischer und magnetischer Felder. Mit 4 Abbildungen. 4, 360.
- Stiller, H., München: Innere Dämpfung als Folge eines Umordnungsvorganges. Mit 7 Abbildungen. 3, 283.

Stolz, H., Berlin: Zur Theorie der Sekundärelektronenemission von Metallen. Der Transportprozeß. Mit 6 Abbildungen. **3**, 197.

Streitwolf, H. W., Berlin: Zur Theorie der Sekundärelektronenemission von Metallen. Der Anregungsprozeß. Mit 6 Abbildungen. **3**, 183.

Suchy, K., Breisach: Siehe Rawer, K. **3**, 155.

Syrbe, G., Leipzig: Mechanoelektrische Eigenschaften von Tellur-Einkristallen. Mit 13 Abbildungen. **4**, 132.

**T**

Tietz, T., Łódź (Polen): Phasenverschiebungen in der statistischen Theorie des Atoms. **3**, 105.

Tischer, M., u. Hess, S., Rostock: Die Materialgleichungen in beliebigen Medien. **3**, 113.

Treder, H., Berlin: Siehe Papapetrou **3**, 360.

**U**

Ullmann, D., Jena: Untersuchungen zu einer neuen Theorie der Turbulenzentstehung. **3**, 316.

**V**

Vogt, E., u. Gerstenberg, D., Marburg-Lahn: Magnetische Untersuchungen an goldreichen Mischkristallen mit Titan und Vanadium. Mit 6 Abbildungen, **4**, 145.

**W**

Wachtel, E., Stuttgart: Siehe Scheil, E. **4**, 58.

Wagner, H., München: Siehe Hettner, G., **4**, 89.

Weber, K. H., Leipzig: Zur Deutung der magnetischen Protonenresonanzabsorption an geordneten kristallinflüssigen Präparaten der Azoxyphenol-di-p-n-alkyläther. Mit 14 Abbildungen, **3**, 1.

Weber, K. H., Leipzig: Kernresonanzuntersuchungen an kristallinen Flüssigkeiten: Zur Frage der Molekülrotation in smektischen Phasen. Mit 5 Abbildungen. **3**, 125.

Weiß, H., Erlangen: Thermospannung und Wärmeleitung von III—V-Verbindungen und ihren Mischkristallen. Mit 9 Abbildungen. **4**, 121.

Westerboer, I., Münster/Westf.: Siehe Bittel, H. **4**, 203.

Westpfahl, K., Freiburg/Br.: Zur Theorie einer Klasse von Beugungsproblemen mittels singulärer Integralgleichungen I. Teil A. „Klassische“ Beugungsprobleme. Mit 12 Abbildungen. **4**, 283.

Weyssenhoff, H. v., Bonn: Siehe Groth, W., **4**, 69.

Wojaczek, K., Berlin: Vereinfachte Diffusionstheorie der laufenden Schichten. Mit 2 Abbildungen. **3**, 37.

**Z**

Zimmer, E., München: Siehe Armbruster **4**, 251.

Zu

In d  
Qua  
theo  
Da  
Dar  
bes  
rein  
vorl  
nebe  
die

Deu  
195  
In d  
entl  
Leb  
blen  
Mes  
dies  
kali

---

**Verantwortlich**

für die Schriftleitung: Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6; für den Anzeigenteil: DEWAG-Werbung Leipzig, Leipzig C 1, Friedrich-Ebert-Str. 110, Ruf 78 51. Z. Z. gilt Anzeigenpreisliste 4. Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18B, Fernruf: 27 681, 27 682. ZLN 5066

Printed in Germany

Druck: Paul Dünnhaupt, Köthen (IV/5/1) L 191/59

Zwei Sonderbände der „Fortschritte der Physik“

## Die Methoden der Molekülphysik und ihre Anwendungsbereiche

Von Dr. HEINZ WERNER PREUSS

1959. VII, 167 Seiten · 8 Abb. · 64 Tab. · gr. 8° · DM 22,—

In dem vorliegenden Bericht werden die drei grundsätzlichen Verfahrensweisen der Quantenchemie behandelt, die halbempirischen, die theoretischen und die halbtheoretischen Verfahren, wie sie der Verfasser nennt.

Da eine scharfe Trennung der einzelnen Methoden nicht möglich ist, wird in der Darstellung auf die verschiedenen Querverbindungen großer Wert gelegt. Dies gilt besonders für den Abschnitt über die halbtheoretischen Verfahren, die sich von den rein theoretischen dadurch unterscheiden, daß in ihnen bei der Bestimmung einiger vorkommender Größen von empirischen Werten Gebrauch gemacht wird. Hier sind neben den halbtheoretischen Fassungen der oben erwähnten Verfahren zu nennen: die Methode der „Atome in Molekülen“ und die „Elektronengasmethode“.

## Künstliche Erdsatelliten

(Übersetzung aus dem Russischen)

Deutsche Redaktion durch Prof. Dr. HANS REICHARDT und Dr. E. A. NIEKISCH

1959. VII, 357 Seiten · 148 Abb. · 4 Kunstdrucktafeln · 31 Tab. · gr. 8° · DM 38,—

In diesem Werk sind 21 Arbeiten sowjetischer Physiker über künstliche Erdsatelliten enthalten. So werden z. B. das Hinaufbringen eines Satelliten auf seine Bahn, seine Lebensdauer, Bahnströmungen, der Einfluß geophysikalischer Faktoren sowie Probleme des Fluges zum Mond behandelt. Weitere Arbeiten beschäftigen sich mit Messungen, die mit Hilfe von künstlichen Erdsatelliten durchgeführt werden. Alle diese Arbeiten vermitteln ein eindrucksvolles Bild von der Vielseitigkeit der physikalischen Probleme, die im Zusammenhang mit künstlichen Erdsatelliten auftreten.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

Ausführliche Prospekte erhalten Sie auf Wunsch

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

## Höhere Mathematik für den Praktiker

Von Prof. Dr. G. JOOS

Direktor des Physikalischen Instituts der Technischen Hochschule München

und Prof. Dr. Th. KALUZA †, Göttingen

9., verbesserte Auflage

XII, 399 Seiten mit 97 Abb. im Text. 1958. Gr. 8°. DM 21.60, Ln. DM 23.10

PTT Technische Mitteilungen: „Es ist kaum notwendig, dieses Werk, das zu den besten dieser Art gehört und das sich schon längst einen guten Namen erworben hat, besonders zu empfehlen. Die für einzelne Wissenschaften speziellen mathematischen Methoden können natürlich in einem Lehrgang dieser Art nicht erschöpfend behandelt werden, aber gerade durch die Beschränkung auf die allgemeinen Grundsätze sichert sich das Buch einen großen Interessentenkreis.“

G. W. Epprecht

HORT-THOMA

## Die Differentialgleichungen der Technik und Physik

7. Auflage des Lehrbuches

„Die Differentialgleichungen des Ingenieurs“ von W. HORT

Neubearbeitet von Dr. phil. ALFRED THOMA, Fulda

XI, 582 Seiten mit 343 Abb. im Text. 1956. Gr. 8°. DM 36.—, Ln. DM 38.—

„Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete“: „Der Verfasser hat mit viel Geschick und Umsicht die Fülle des den verschiedenen Gebieten der Technik und Physik entnommenen Stoffes zu einem Ganzen geformt, ohne dabei das Ziel aus den Augen zu verlieren, den Nutzen der Mathematik im Schaffen des Ingenieurs deutlich erkennbar zu machen. Da das Buch in erster Linie für Ingenieure und Physiker geschrieben ist, liegt bei der Darstellung der mathematischen Methoden die Betonung auf dem Handwerklichen. Die vorliegende Auflage des bewährten Werkes wird sich sicherlich in Ingenieurkreisen viele Freunde erwerben.“

W. Quade

## Größengleichungen, Einheiten und Dimensionen

Von Prof. Dr. phil., Dr.-Ing. e. h. JULIUS WALLOT

Honorarprofessor an der Technischen Hochschule Karlsruhe

2., verbesserte Auflage

XII, 220 Seiten. 1957. Gr. 8°. DM 14.70, Leinen DM 16.35

„Zeitschrift für Naturforschung“: „Das Buch ist nicht nur ein sicherer, sondern auch ein angenehmer Wegweiser durch das behandelte, oft als trocken verschrieene Gebiet, denn es ist überaus anregend und ohne Aufwand an mathematischen Methoden geschrieben. Es beendet zudem in überzeugender Weise den Meinungsstreit über so viele Fragen, daß es aller Wahrscheinlichkeit nach auf lange Zeit hinaus das grundlegende Werk auf seinem Gebiet sein wird.“

Johannes Fischer (Karlsruhe)

JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

8367

10  
en  
at.  
e.  
r.  
as  
ht

—  
bit  
nd  
en  
ar  
gt  
n.  
en  
de

rn  
et.  
n.  
ad  
m  
e)

G